

混合参数化下的多水平因析设计

夏新新¹, 王春燕², 孙法省^{3*}

1. 江西财经大学统计与数据科学学院, 南昌 330013

2. 中国人民大学统计学院和应用统计科学研究中心, 北京 100872

3. 东北师范大学数学与统计学院和应用统计教育部重点实验室, 长春 130024

E-mail: xiaxx818@nenu.edu.cn, chunyanwang@ruc.edu.cn, sunfs359@nenu.edu.cn

收稿日期: 2026-XX-XX; 接受日期: 2026-XX-XX; 网络出版日期: 2026-XX-XX; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 12301323 和 12371259) 和中央高校基本科研业务费 (2412023YQ003) 资助项目

摘要 传统的因析效应通常基于正交参数化或基线参数化来分析. 然而, 在实际应用中, 常常需要同时在两种参数化下解释试验结果. 因此产生了“混合参数化”的概念. 已有学者在混合参数化下对两水平设计开展了研究, 但将其推广到 $s (\geq 3)$ 水平设计仍具有挑战性. 本文旨在混合参数化下研究 $s (\geq 3)$ 水平设计的构造及其理论性质. 首先, 本文揭示了正交、基线和混合参数化之间的关系. 其次, 证明了在混合参数化的主效应模型下, s 水平正交表在所有设计中实现了 D_s -最优, 并在平衡设计类中达到 A_s -最优. 基于这些结果, 本文提出了两种适用于 s 水平设计的最小低阶混杂准则, 并给出在混合参数化下搜索近似最优设计的算法, 为多水平试验提供了新的设计方法.

关键词 部分因析设计 最小低阶混杂 混合参数化 正交表

MSC (2020) 主题分类 62K05, 62K15

1 引言

部分因析设计被广泛应用于筛选试验. 在现有的多数研究中, 一般采用正交参数化来分析部分因析设计, 在这种参数化下, 每个因子的水平被视为同等重要, 且因析效应由一组正交对照定义. 在正交参数化下, 广义最小低阶混杂准则常用于对部分因析设计进行选择^[17]. 关于正交参数化下部分因析设计的详细研究, 请参阅 [4, 8, 12, 14, 15].

尽管正交参数化一直是研究部分因析设计的主流方法, 但近些年, 基线参数化在很多领域得到广泛应用. 它适用于每个因子都存在明确定义的零状态或基线水平的情形, 例如 cDNA 微阵列试验^[1, 5, 20]. 关于基线参数化的研究, 早期工作主要集中在两水平设计, 已有多位研究者提出基线参数化下两水平设计的构造方法^[7, 9–11]. 近年来, 研究逐步拓展至多水平. Yan 和 Zhao^[18, 19] 给出了基线参数化下的 s 水平 ($s \geq 3$) 设计的最小低阶混杂准则, 并提出了一种用于识别最优设计的完全搜索算

英文引用格式: Xia X X, Wang C Y, Sun F S. Multi-Level Factorial Designs Under Mixed Parameterization (in Chinese). Sci Sin Math, 2026, 56: 1–28, doi: [10.1360/SSM-2026-XXXX](https://doi.org/10.1360/SSM-2026-XXXX)

法. Xia 等^[16]研究了基线参数化下 s 水平设计的理论性质, 进一步推动了基线参数化下部分因析设计的发展.

在一些实际应用中, 存在一部分因析效应适合用正交参数化定义, 而另一部分因析效应则适合用基线参数化表示. 例如, 在一项新药临床试验中, 需要同时评估药物剂量 (包含安慰剂、低剂量、高剂量三个水平) 与服药时间 (早晨、中午、晚上三个水平) 对疗效的影响. 其中, 剂量因子以“安慰剂”为零状态, 适合采用基线参数化, 而服药时间的三个水平是相互平等的, 适合采用正交参数化. 在此情况下, 单独使用正交参数化或基线参数化均无法适用于此类试验. 为克服这一局限, Chen 和 Tang^[2]首次提出了混合参数化的概念, 并研究了在混合参数化下适用于两水平试验的设计构造算法. 混合参数化统一了正交参数化与基线参数化的结构, 具有广泛的适用性. 然而, 上述药物试验等许多实际试验往往涉及多水平因子 (如剂量与时间均多于两个水平). 因此, 将混合参数化推广到一般的 s 水平 ($s \geq 3$) 具有重要的理论与实际意义. 本文研究任意 $s \geq 3$ 的 s 水平部分因析设计在混合参数化下的一般理论. 首先研究了正交、基线与混合参数化之间的关系. 其次证明了在主效应模型下, s 水平正交表在混合参数化下仍具有最优性. 此外, 本文为 s 水平设计在混合参数化下定义了两个最小低阶混杂准则, 并推导出这两个准则的理论上限. 基于这个上限, 本文提出了一种用于寻找混合参数化下近似最小低阶混杂设计的搜索算法.

本文其余部分安排如下. 第 2 节给出了任意 $s (\geq 3)$ 水平设计在正交、基线和混合三种参数化下的主效应模型, 建立了三种参数化之间的等价性, 并证明了 s 水平正交表在混合参数化下的最优性. 第 3 节提出了混合参数化下 s 水平设计的两个最小低阶混杂准则, 并研究了相关的理论性质. 第 4 节提出了一种用于构建混合参数化下 s 水平最小低阶混杂设计的算法. 第 5 节总结本文并讨论一些未来的工作. 附录 A 给出所有的证明. 附录 B 列出了由本文定义的两个准则下的近似最优设计, 包括 9 次和 18 次试验的三水平设计、16 次试验的四水平设计以及 25 次试验的五水平设计.

2 模型设定与初步结果

令 $Z_s = \{0, 1, \dots, s-1\}$, 并定义 $H = Z_s \times \dots \times Z_s$, 其中 Z_s 重复 n 次, \times 表示笛卡尔积. 考虑一个包含 n 个因子 F_1, \dots, F_n 的 s^n 因析设计, 每个因子的水平取自 Z_s . 设 τ_{i_1, \dots, i_n} 为处理组合 i_1, \dots, i_n 的处理均值, 其中对于 $j = 1, \dots, n$, 有 $i_j \in Z_s$. 为了方便, 文中交换使用 τ_{i_1, \dots, i_n} 和 $\tau_{i_1 \dots i_n}$.

2.1 正交参数化

对于任意处理组合 $i_1, \dots, i_n \neq 0, \dots, 0$, 有

$$\tau_{i_1, \dots, i_n} = \sum_{u \in H} \chi_u(i_1, \dots, i_n) \beta_u,$$

其中 $\chi_u(i_1, \dots, i_n)$ 为正交对照系数, β_u 为正交参数化下的因析效应, 详见 Xu 和 Wu^[17]. 定义 $wt(u)$ 为向量 $u = (u_1, \dots, u_n)$ 中非零元素的个数. 则对于满足 $wt(u) = i$ 的 $u \in H$, β_u 为一个 i 因子交互效应. 特别地, $\beta_0 = \beta_{0 \dots 0}$ 是总均值, 其系数为 $\chi_0(x) = \chi_{0, \dots, 0}(x) = 1$.

根据效应排序原则^[15], 主效应是最重要的. 假设所有交互效应均可忽略, 则对所有满足 $wt(u) \geq$

2 的 u , 有 $\beta_u = 0$. 因此, 对于每个 i_1, \dots, i_n , 有

$$\tau_{i_1, \dots, i_n} = \beta_0 + \sum_{wt(u)=1} \chi_u(i_1, \dots, i_n) \beta_u.$$

对于一个 $N \times n$ 设计 D , 正交参数化下的主效应模型为

$$Y = X\beta + \epsilon = \mathbf{1}_N \beta_0 + X_1 \beta_1 + \epsilon, \tag{2.1}$$

其中 Y 为观测响应向量, $X = [\mathbf{1}_N, X_1]$, $\mathbf{1}_N$ 是所有元素均为 1 的 $N \times 1$ 向量, $X_1 = [\chi_u(x)]_{x \in D, wt(u)=1}$, $\beta = (\beta_{0\dots 0}, \beta_{10\dots 0}, \dots, \beta_{00\dots s-1})^\top$ 是由截距项和所有主效应组成的 $((s-1)n+1) \times 1$ 向量, ϵ 是随机误差向量, 假定其各分量不相关且有共同方差 σ^2 .

令 $\tau = (\tau_{0, \dots, 0}, \dots, \tau_{s-1, \dots, s-1})^\top$ 且 $\tilde{\beta} = (\beta_{0\dots 0}, \dots, \beta_{s-1\dots s-1})^\top$, 其中两个向量中的元素均按 Yates 序排列. 则在正交参数化下, 有

$$\tau = (P_s \otimes \dots \otimes P_s) \tilde{\beta}, \tag{2.2}$$

其中 P_s 是 s 阶列正交矩阵 ($P_s^\top P_s = sI_s$), 其第一列为 $\mathbf{1}_s$, 且 P_s 重复 n 次. 下面的例子说明了 $\tilde{\beta}$ 与 τ 之间的关系.

例 2.1 考虑一个包含 2 个因子的三水平设计. 则 $\tau = (\tau_{00}, \tau_{01}, \tau_{02}, \tau_{10}, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{20}, \tau_{21}, \tau_{22})^\top$, $\tilde{\beta} = (\beta_{00}, \beta_{01}, \beta_{02}, \beta_{10}, \beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{20}, \beta_{21}, \beta_{22})^\top$, 且

$$P_3 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\sqrt{6}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \frac{\sqrt{6}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \quad P_3^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{2}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{6} \end{pmatrix}.$$

根据变换 $\tau = (P_3 \otimes P_3) \tilde{\beta}$, 可得

$$\begin{aligned} \beta_{00} &= 1/9(\tau_{00} + \tau_{01} + \tau_{02} + \tau_{10} + \tau_{11} + \tau_{12} + \tau_{20} + \tau_{21} + \tau_{22}); \\ \beta_{01} &= \sqrt{6}/18(\tau_{02} - \tau_{00} + \tau_{12} - \tau_{10} + \tau_{22} - \tau_{20}); \\ \beta_{02} &= \sqrt{2}/18(\tau_{02} + \tau_{00} - 2\tau_{01} + \tau_{12} + \tau_{10} - 2\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{20} - \tau_{21}); \\ \beta_{10} &= \sqrt{6}/18(\tau_{20} + \tau_{21} + \tau_{22} - \tau_{00} - \tau_{01} - \tau_{02}); \\ \beta_{11} &= 1/6(\tau_{01} - \tau_{02} + \tau_{22} - \tau_{20}); \\ \beta_{12} &= \sqrt{3}/18(2\tau_{01} - \tau_{00} - \tau_{02} + \tau_{20} + \tau_{22} - 2\tau_{21}); \\ \beta_{20} &= \sqrt{2}/18(\tau_{00} + \tau_{01} + \tau_{02} + \tau_{20} + \tau_{21} + \tau_{22} - 2\tau_{10} - 2\tau_{11} - 2\tau_{12}); \\ \beta_{21} &= \sqrt{3}/18(\tau_{02} - \tau_{00} + 2\tau_{10} - 2\tau_{12} + \tau_{22} - \tau_{20}); \\ \beta_{22} &= 1/18(\tau_{00} + \tau_{02} - 2\tau_{01} + 4\tau_{11} - 2\tau_{10} - 2\tau_{12} + \tau_{20} + \tau_{22} - 2\tau_{21}). \end{aligned}$$

2.2 基线参数化

令 0 表示每个因子的基线水平, 且本文只考虑具有一个基线水平的情况. 对满足 $u \in H$ 和 $wt(u) = i$ 的 u , 令 θ_u 表示基线参数化下对应的 i 因子交互效应. 则对任意处理组合 $i_1, \dots, i_n \neq 0, \dots, 0$, 有

$$\tau_{i_1, \dots, i_n} = \theta_{0 \dots 0} + \sum_{b=1}^n \sum_{h_1, \dots, h_b \in \psi_b} \left(\prod_{w=1}^b j_{h_w} \right) \theta_{\sum_{w=1}^b g_{h_w}}.$$

这里, 对 $b = 1, \dots, n$, ψ_b 表示所有满足 $1 \leq h_1 < \dots < h_b \leq n$ 的 b 元组 h_1, \dots, h_b 的集合. 对 $l = 1, \dots, n$, j_l 是一个示性变量, 其定义如下: 若 $i_l = 0$ 则 $j_l = 0$, 否则 $j_l = 1$. 令 g_l 是长度为 n 的序列. 在该序列中, 第 l 个位置为因子 F_l 的水平, 其余位置均为零. 在假设仅有主效应活跃的情况下, 即当 $b \geq 2$ 时, $\theta_{g_1 \dots g_b} = 0$. 这时

$$\tau_{i_1, \dots, i_n} = \theta_{0 \dots 0} + j_1 \theta_{g_1} + \dots + j_n \theta_{g_n}.$$

进而, 对一个 $N \times n$ 设计 D , 基线参数化下的主效应模型为

$$Y = Z\theta + \epsilon = \mathbf{1}_N \theta_{0 \dots 0} + Z_1 \theta_1 + \epsilon,$$

其中 $Z = [\mathbf{1}_N, Z_1]$, Z_1 是 $N \times (s-1)n$ 矩阵, 表示主效应模型矩阵. $\theta = (\theta_{0 \dots 0}, \theta_{10 \dots 0}, \dots, \theta_{00 \dots s-1})^\top$ 是由截距项和所有主效应组成的 $((s-1)n+1) \times 1$ 列向量. 类似地, 令 $\tilde{\theta} = (\theta_{0 \dots 0}, \dots, \theta_{s-1 \dots s-1})^\top$. 则在基线参数化下,

$$\tau = (B_s \otimes \dots \otimes B_s) \tilde{\theta}, \quad (2.3)$$

其中 B_s 重复 n 次, 且 $B_s = (\mathbf{1}_s, (\mathbf{0}_{s-1}, I_{s-1})^\top)$, 这里 I_{s-1} 是 $s-1$ 阶单位矩阵. 例 2.2 说明了 $\tilde{\theta}$ 与 τ 之间的关系.

例 2.2 考虑一个包含 2 个因子的三水平设计. 则 $\tau = (\tau_{00}, \tau_{01}, \tau_{02}, \tau_{10}, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{20}, \tau_{21}, \tau_{22})^\top$, $\tilde{\theta} = (\theta_{00}, \theta_{01}, \theta_{02}, \theta_{10}, \theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{20}, \theta_{21}, \theta_{22})^\top$, 且

$$B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

根据变换 $\tau = (B_3 \otimes B_3) \tilde{\theta}$, 可得

$$\begin{aligned} \theta_{00} &= \tau_{00}, & \theta_{01} &= \tau_{01} - \tau_{00}, & \theta_{02} &= \tau_{02} - \tau_{00}; \\ \theta_{10} &= \tau_{10} - \tau_{00}, & \theta_{11} &= \tau_{11} - \tau_{10} - \tau_{01} + \tau_{00}, & \theta_{12} &= \tau_{12} - \tau_{10} - \tau_{02} + \tau_{00}; \\ \theta_{20} &= \tau_{20} - \tau_{00}, & \theta_{21} &= \tau_{21} - \tau_{20} - \tau_{01} + \tau_{00}, & \theta_{22} &= \tau_{22} - \tau_{20} - \tau_{02} + \tau_{00}. \end{aligned}$$

在例 2.1 和 2.2 中, 因析效应完全在正交参数化或完全在基线参数化下定义. 本文考虑一种更为一般的情形, 即混合参数化. 在此框架下, 部分效应采用基线参数化定义, 其余效应则采用正交参数化定义.

2.3 混合参数化

考虑一个包含 n 个因子的试验, 其中前 n_1 个因子的效应定义在基线参数化下, 后 $n_2 = n - n_1$ 个因子的效应定义在正交参数化下. 称前 n_1 个因子为 B 因子, 后 n_2 个因子为 O 因子. 令 $\tilde{\zeta} = (\zeta_{0\dots 0}, \dots, \zeta_{s-1\dots s-1})^\top$ 为 $s^n \times 1$ 向量, 其中元素按 Yates 序排列. 当 $u \in H$ 且 $wt(u) = i$ 时, ζ_u 表示混合参数化下的一个 i 因子交互效应. 根据 (2.2) 和 (2.3) 可得, 在混合参数化下,

$$\tau = (B_s \otimes \cdots \otimes B_s \otimes P_s \otimes \cdots \otimes P_s) \tilde{\zeta},$$

其中 B_s 重复 n_1 次, P_s 重复 n_2 次.

例 2.3 考虑包含一个 B 因子和一个 O 因子的三水平设计. 则 $\tau = (\tau_{00}, \tau_{01}, \tau_{02}, \tau_{10}, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{20}, \tau_{21}, \tau_{22})^\top$, $\tilde{\zeta} = (\zeta_{00}, \zeta_{01}, \zeta_{02}, \zeta_{10}, \zeta_{11}, \zeta_{12}, \zeta_{20}, \zeta_{21}, \zeta_{22})^\top$, 且

$$B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\sqrt{6}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \frac{\sqrt{6}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

根据变换 $\tau = (B_3 \otimes P_3) \tilde{\zeta}$, 可得

$$\begin{aligned} \zeta_{00} &= 1/3(\tau_{00} + \tau_{01} + \tau_{02}), & \zeta_{01} &= \sqrt{6}/6(\tau_{02} - \tau_{00}), & \zeta_{02} &= \sqrt{2}/6(\tau_{00} - 2\tau_{01} + \tau_{02}); \\ \zeta_{10} &= 1/3(\tau_{10} - \tau_{00} + \tau_{11} - \tau_{01} + \tau_{12} - \tau_{02}), & \zeta_{11} &= \sqrt{6}/6(\tau_{00} - \tau_{02} + \tau_{12} - \tau_{10}); \\ \zeta_{12} &= \sqrt{2}/6(2\tau_{01} - \tau_{00} - \tau_{02} + \tau_{10} - 2\tau_{11} + \tau_{12}), & \zeta_{20} &= 1/3(\tau_{20} - \tau_{00} + \tau_{21} - \tau_{02} + \tau_{22} - \tau_{02}); \\ \zeta_{21} &= \sqrt{6}/6(\tau_{00} - \tau_{02} + \tau_{22} - \tau_{20}), & \zeta_{22} &= \sqrt{2}/6(2\tau_{01} - \tau_{00} - \tau_{02} + \tau_{20} - 2\tau_{21} + \tau_{22}). \end{aligned}$$

ζ_{ij} 衡量了 B 因子从水平 0 变为水平 i 时, O 因子的 j 次效应所发生的变化. 如

$$\zeta_{12} = \sqrt{2}/6(2\tau_{01} - \tau_{00} - \tau_{02} + \tau_{10} - 2\tau_{11} + \tau_{12}) = \sqrt{2}/6[(\tau_{10} - 2\tau_{11} + \tau_{12}) - (\tau_{00} - 2\tau_{01} + \tau_{02})] = \sqrt{2}/6(\tau_{1\cdot} - \tau_{0\cdot}).$$

其中 $\tau_{i\cdot}$ 表示 B 因子在 i 水平时 O 因子的效应. 因此, ζ_{12} 为 B 因子从水平 0 变为水平 1 时, O 因子的二次效应所发生的变化. 换言之, ζ_{12} 刻画了由于 B 因子的水平变动对 O 因子二次效应的影响. 通过对以上三种参数化的分析可知, τ (处理效应) 与 $\tilde{\beta}$ 、 $\tilde{\theta}$ 和 $\tilde{\zeta}$ (分别为正交、基线和混合参数化下的因析效应) 中的每一个都相关联. 定理 2.1 进一步建立了 $\tilde{\beta}$ 、 $\tilde{\theta}$ 和 $\tilde{\zeta}$ 之间的关系.

定理 2.1 对正交、基线和混合参数化而言, 若涉及 $k (\geq 2)$ 个或更多因子的交互效应在一种参数化下可忽略, 则在其他两种参数化下同样可忽略.

注 2.1 定理 2.1 将 Chen 和 Tang^[2] 中的推论 1 (对应 $s = 2$ 这一情况) 推广至一般情形. 此外, 该定理也将 Sun 和 Tang^[13] 推论 1 中的特例进一步拓展至混合参数化与多水平框架之下, 更具有有一般性.

例 2.4 考虑包含一个 B 因子和一个 O 因子的三水平设计. 根据上文讨论的三种参数化可得

$$\begin{aligned} \zeta_{11} &= \sqrt{6}/6\theta_{12}, & \zeta_{12} &= \sqrt{2}/6\theta_{12} - \sqrt{2}/3\theta_{11}; \\ \zeta_{21} &= \sqrt{6}/6\theta_{22}, & \zeta_{22} &= \sqrt{2}/6\theta_{22} - \sqrt{2}/3\theta_{21}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\zeta_{11} &= \sqrt{6}/2\beta_{11} - 3\sqrt{2}/2\beta_{12}, & \zeta_{12} &= \sqrt{6}\beta_{11}; \\ \zeta_{21} &= \sqrt{6}/2\beta_{21} - 3\sqrt{2}/2\beta_{22}, & \zeta_{22} &= \sqrt{6}\beta_{21}.\end{aligned}$$

例 2.4 表明, 如果交互效应在正交参数化或基线参数化下不存在, 则在混合参数化下也不存在. 由于主效应的估计问题在正交和基线参数化下已有完善的理论. 接下来我们考虑混合参数化下主效应的估计问题.

考虑一个 $N \times n$ 设计, 其中包含 n_1 个 B 因子和 $n_2 = n - n_1$ 个 O 因子. 这时主效应模型为

$$Y = W\zeta + \epsilon = \mathbf{1}_N\zeta_0 + W_1\zeta_1 + \epsilon = \mathbf{1}_N\zeta_0 + Z_1\zeta_{11} + X_1\zeta_{12} + \epsilon. \quad (2.4)$$

这里 ζ_0 表示总均值, 且 $W_1 = (Z_1, X_1)$, 其中 Z_1 和 X_1 分别表示对应于 B 因子和 O 因子主效应的模型矩阵. $\zeta_1 = (\zeta_{11}^\top, \zeta_{12}^\top)^\top$, 其中 ζ_{11} 和 ζ_{12} 分别是与 B 因子和 O 因子对应的主效应向量.

例 2.5 考虑一个 9×2 的三水平设计 D , 它包含一个 B 因子 (记为 A) 和一个 O 因子 (记为 B). 表 1 展示了具体的设计 D 和对应的一阶模型矩阵.

表 1 设计 D 及其一阶模型矩阵 $W_1 = (Z_1, X_1)$

D		Z_1		X_1	
A	B	A_1	A_2	B_1	B_2
0	0	0	0	$-\sqrt{6}/2$	$\sqrt{2}/2$
0	1	0	0	0	$-\sqrt{2}$
0	2	0	0	$\sqrt{6}/2$	$\sqrt{2}/2$
1	0	1	0	$-\sqrt{6}/2$	$\sqrt{2}/2$
1	1	1	0	0	$-\sqrt{2}$
1	2	1	0	$\sqrt{6}/2$	$\sqrt{2}/2$
2	0	0	1	$-\sqrt{6}/2$	$\sqrt{2}/2$
2	1	0	1	0	$-\sqrt{2}$
2	2	0	1	$\sqrt{6}/2$	$\sqrt{2}/2$

在模型 (2.4) 下, 参数向量 ζ 的最小二乘估计为 $\hat{\zeta} = (W^\top W)^{-1}W^\top Y$. $\hat{\zeta}$ 的方差-协方差矩阵为 $\sigma^2(W^\top W)^{-1}$. 由于筛选试验主要关注主效应的估计, 因此接下来我们研究主效应估计的方差, 即 $\text{var}(\hat{\zeta}_1) = \sigma^2(W^\top W)_{(-1,-1)}^{-1}$, 其中 $A_{(-1,-1)}^{-1}$ 表示从矩阵 A^{-1} 中移除第一行和第一列后得到的子矩阵. 为了最小化 $\text{var}(\hat{\zeta}_1)$, 我们希望找到一个设计, 使得 $(W^\top W)_{(-1,-1)}^{-1}$ 达到最小. 针对这一最小化问题存在多种最优性准则, 其中最常用的方法是对 $(W^\top W)_{(-1,-1)}^{-1}$ 的行列式或迹进行最小化. 在模型 (2.1) 下, 称一个设计是 D_s -最优的, 若该设计最小化 $(X^\top X)_{(-1,-1)}^{-1}$ 的行列式; 称一个设计是 A_s -最优的, 若该设计最小化 $\text{tr}((X^\top X)_{(-1,-1)}^{-1})$. 将 X 替换为 W , 这些准则可以自然地推广到模型 (2.4). 根据 Cheng [3] 和 Xia 等 [16] 的结果可知, 正交表在主效应模型下对于正交参数化和基线参数化均能达到 D_s -最优. 此外, 正交表在所有设计中对于正交参数化是 A_s -最优的, 在所有平衡设计中对于基线参数化是 A_s -最优的. 称元素取自 Z_s 的 $N \times n$ 矩阵是强度为 t 的正交表, 如果它的每一个 $N \times t$ 子矩阵

中任意 t 元组都出现且出现的次数相同 [6]. 不失一般性, 下文提到的正交表的强度均大于 1. 利用正交表的性质, 可得到一个关键的理论结果即定理 2.2, 该结果为混合参数化下的最优设计提供了理论基础.

定理 2.2 在模型 (2.4) 下, 正交表在所有设计中实现 D_s -最优, 并在所有平衡设计中是 A_s -最优的.

定理 2.2 表明, 正交表从不同角度最小化了主效应估计的方差. 因此, 在接下来的讨论中, 我们从正交表中寻找最优设计.

3 两个最小低阶混杂准则

如果交互效应不可忽略, 真实模型可表示为

$$Y = W\zeta + W_2\zeta_2 + \cdots + W_n\zeta_n + \epsilon, \quad (3.1)$$

其中 ζ_p 表示所有 p 因子交互效应的向量, W_p 是对应于所有 p 因子交互作用的模型矩阵 ($p = 2, \dots, n$). 在真实模型 (3.1) 下, $\hat{\zeta}$ 的期望值为

$$E(\hat{\zeta}) = \zeta + (W^T W)^{-1} W^T W_2 \zeta_2 + \cdots + (W^T W)^{-1} W^T W_n \zeta_n.$$

这里 $(W^T W)^{-1} W^T W_p \zeta_p$ 表示 p 因子交互作用对 $\hat{\zeta}$ 估计造成的偏差. 由于在筛选试验中不关心截距的估计, 因此本文专注于从正交表中选择一个设计来最小化主效应估计的偏差. 值得注意的是, 本文考虑的因子同时包括 B 因子和 O 因子. 由于 p 因子交互作用 ζ_p 的存在对 B 因子主效应估计造成的偏差为 $B_p \zeta_p$, 其中 B_p 由 $(W^T W)^{-1} W^T W_p$ 的第 2 至 $(s-1)n_1 + 1$ 行构成. 类似地, 由于 p 因子交互作用 ζ_p 的存在对 O 因子主效应估计的偏差为 $O_p \zeta_p$, 其中 O_p 由 $(W^T W)^{-1} W^T W_p$ 的后 $(s-1)n_2$ 行构成. 假设所有 p 因子交互效应是同等可能活跃的, 则 $Q_p^B = \text{tr}(B_p^T B_p)$ 和 $Q_p^O = \text{tr}(O_p^T O_p)$ 可分别刻画由 p 因子交互作用 ζ_p 引起的 B 因子和 O 因子主效应估计的偏差. 相应地, p 因子交互作用对所有因子主效应估计造成的总偏差为 $Q_p = Q_p^B + Q_p^O$.

在混合参数化下, B 因子和 O 因子的效应定义方式不同, 重要性也可能存在差异. 由于 B 因子的主效应在基线参数化下定义, 它们通常与系统的默认设置有关. 在实践中, 出于对成本、稳定性或可解释性等方面的考虑, 默认设置通常更为重要. 因此, 对应于这些默认设置的 B 因子是更重要的. 因此在某些应用中, B 因子的主效应通常被认为比 O 因子的主效应更重要. 同时根据效应排序原则, 低阶效应比高阶效应更重要, 同阶效应是同等重要的, 因此本文提出以下最小 Q_B 低阶混杂准则.

定义 3.1 一个包含 n 个因子的 s 水平正交表, 如果它序贯地最小化 $Q_2^B, Q_2^O, Q_3^B, Q_3^O, \dots, Q_n^B, Q_n^O$, 则称其是最小 Q_B 低阶混杂设计.

虽然 B 因子通常被认为比 O 因子更重要, 但在一些实际应用中, 两者也有可能是同等重要的, 这时在最优设计的选择中应被平等对待. 因此, 根据效应排序原则, 目标是找到序贯地最小化 $Q_p = Q_p^B + Q_p^O$ 的设计, 其中 $p = 2, \dots, n$.

定义 3.2 一个包含 n 个因子的 s 水平正交表, 如果它序贯地最小化 Q_2, Q_3, \dots, Q_n , 则称其是最小 Q 低阶混杂设计.

注 3.1 类似于 Xu 和 Wu [17] 的结论, 本文提出的最小 Q_B 低阶混杂和最小 Q 低阶混杂准则均与正交对照的选取无关.

定理 2.2 说明正交表在主效应模型下最小化主效应估计的方差. 下面的结果进一步刻画了当使用正交表作为设计时主效应估计的偏差.

定理 3.1 在混合参数化下, 对于任意一个具有 n 个因子、强度为 $t (\geq 2)$ 的 s 水平正交表, 设其前 n_1 个为 B 因子, 其余 $n_2 = n - n_1$ 个为 O 因子, 则对于 $2 \leq p \leq t - 1$, 我们有 $Q_p^B = p(s-1)^p \binom{n_1}{p} / s^{2p-2}$ 和 $Q_p^O = n_2(s-1)^p \binom{n_1}{p-1} / s^{2p-2}$, 且这些值在所有正交表中达到 Q_p^B 和 Q_p^O 的最小值.

根据定理 3.1, 当 n_1 和 n_2 固定时, 所有 $OA(N, n, s, t)$ 对于 $p = 2, \dots, t - 1$ 都具有相同的 Q_p^B 和 Q_p^O 值. 因此, 为了进一步识别最小 Q_B 和 Q 低阶混杂设计, 我们将重点放在 Q_t^B 和 Q_t^O 上. 特别地, 本文首先考察由于单个 p 因子交互作用的存在对 B 因子和 O 因子主效应估计造成的偏差. 这个结果在引理 3.1 中给出, 其在后续的理论推导中起着关键作用. 令 $F_{l_1}^{j_1}, \dots, F_{l_p}^{j_p}$ 表示一个 p 因子交互作用, 它由因子 F_{l_k} 的第 j_k 个效应构成, 其中 $k = 1, \dots, p$. 对任意交互作用 $F_{l_1}^{j_1}, \dots, F_{l_p}^{j_p}$, 令 $W_1(h_{l_1}^{j_1}, \dots, h_{l_p}^{j_p})$ 为 W_p 中由 W_1 的第 $h_{l_1}^{j_1}$ 列, \dots , 第 $h_{l_p}^{j_p}$ 列的元素对应相乘而生成的交互作用列, 其中 $h_{l_k}^{j_k} = (s-1)(l_k - 1) + j_k, k = 1, \dots, p$. 定义

$$\xi_1(h_{l_1}^{j_1}, \dots, h_{l_p}^{j_p}) = \frac{s}{N} (A_c Z_1^\top - J) W_1(h_{l_1}^{j_1}, \dots, h_{l_p}^{j_p}),$$

$$\xi_2(h_{l_1}^{j_1}, \dots, h_{l_p}^{j_p}) = \frac{1}{N} X_1^\top W_1(h_{l_1}^{j_1}, \dots, h_{l_p}^{j_p}),$$

其中 A_c 是一个阶数为 $(s-1)n_1$ 的块对角矩阵, 其对角线上的矩阵为 $I_{s-1} + J_{s-1}$, 其中 J_{s-1} 是一个 $(s-1) \times (s-1)$ 的全一矩阵, J 是一个 $(s-1)n_1 \times N$ 的全一矩阵.

引理 3.1 在模型 (3.1) 下, 一个特定的 p 因子交互作用 $F_{l_1}^{j_1}, \dots, F_{l_p}^{j_p}$ 对 B 因子和 O 因子主效应估计的贡献系数, 分别为 $\xi_1(h_{l_1}^{j_1}, \dots, h_{l_p}^{j_p})$ 和 $\xi_2(h_{l_1}^{j_1}, \dots, h_{l_p}^{j_p})$.

令 H_p^1 表示满足 $p \leq n$ 的 p 元组 $h_{l_1}^{j_1}, \dots, h_{l_p}^{j_p}$ 的集合, H_p 表示从 $\{1, \dots, (s-1)n\}$ 中选出 p 个元素所有可能子集的集合. 则 $H_p^1 \subseteq H_p$. 基于效应排序原则 [15], 除主效应外, 两因子交互作用是最重要的. 因此, 在下一小节中, 我们将分析两因子交互作用对主效应估计造成的偏差.

3.1 两因子交互作用活跃的情形

当一个强度为 2 的正交表被用作混合参数化下的设计时, 由于两因子交互作用的存在而对主效应估计造成的偏差由以下定理刻画.

定理 3.2 设 D 为一个 $OA(N, n, s, 2)$, 包含 n_1 个 B 因子和 $n_2 = n - n_1$ 个 O 因子. 则

$$Q_2^B = \frac{s^2}{N^2} \text{tr}(L_2 R R^\top), \quad Q_2^O = \frac{1}{N^2} \text{tr}(L_2 X_1 X_1^\top) - n_2 C,$$

其中 $L_2 = \sum_{h_1, h_2 \in H_2} W_1(h_1, h_2) W_1(h_1, h_2)^\top$, $R = Z_1 A_c^\top - J^\top$, 且 C 是一个与设计无关的常数.

例 3.1 考虑 10 个非同构的 $OA(18, 5, 3, 2)$ 设计, 标记为 18- i , 其中 $i = 1, \dots, 10$. 对每个设计, 令前三个因子为 B 因子, 后两个因子为 O 因子. 表 2 展示了这 10 个设计的 Q_2^B 、 Q_2^O 、 Q_2 、 $1/N^2 \text{tr}(L_2 X_1 X_1^\top)$ 和 C 的值.

如定理 3.2 所示, 最小化 Q_2^B 和 Q_2^O 分别等价于最小化 $\text{tr}(L_2 R R^\top)$ 和 $\text{tr}(L_2 X_1 X_1^\top)$, 这极大地简化了 Q_2^B 和 Q_2^O 的计算. 此外, 当所有活跃的交互作用都是 BB-型或 OO-型交互作用时, Q_2^B 和 Q_2^O

表 2 10 个非同构设计的 $Q_2^B, Q_2^O, Q_2, 1/N^2 \text{tr}(L_2 X_1 X_1^\top)$ 和 C 的值

设计	Q_2^B	Q_2^O	Q_2	$1/N^2 \text{tr}(L_2 X_1 X_1^\top)$	C
18-1	20.083	3.481	23.564	4.481	0.5
18-2	24.667	3.481	28.148	4.481	0.5
18-3	27.667	3.481	31.148	4.481	0.5
18-4	29.111	3.481	32.593	4.481	0.5
18-5	22.667	3.519	26.185	4.519	0.5
18-6	23.111	3.556	26.667	4.556	0.5
18-7	26.167	3.593	29.759	4.593	0.5
18-8	31.778	3.630	35.407	4.630	0.5
18-9	22.778	3.704	26.481	4.704	0.5
18-10	22.667	3.722	26.389	4.722	0.5

可以被进一步简化, 其中 BB-型和 OO-型交互作用分别表示只涉及两个 B 因子和两个 O 因子的两因子交互作用. 具体细节将在接下来的两个小节中研究.

3.1.1 只有 BB-型交互作用活跃的情形

当只有 BB-型交互作用活跃时,

$$Q_2^B = \text{tr}(B_2^\top B_2), \quad Q_2^O = \text{tr}(O_2^\top O_2),$$

其中 $B_2 = s(A_c Z_1^\top Z_2 - N/s^2 J)/N$, $O_2 = (X_1^\top Z_2)/N$, 且 Z_2 表示由所有 BB-型交互作用列构成的模型矩阵. 对于素数或素数幂 s , 令 h 为满足 $h > \log_s(n_1(s-1) + 1)$ 的最小整数, 且 $m > \max\{h, \log_s(n(s-1) + 1)\}$. 令 A 是由 m 个独立列 a_1, \dots, a_m 及其所有可能的交互作用列构成的矩阵, 即

$$A = (a_1, a_2, \dots, a_m, a_1 a_2, a_1 a_3, \dots, a_{m-1} a_m^{s-1}, \dots, a_1 a_2^{s-1} \cdots a_m^{s-1}),$$

其中 $a_i a_j^k$ 是线性组合 $(a_i + k a_j) \bmod s$ 的简记. 此外, 令 A_1 为由 h 个独立列 a_1, \dots, a_h 及其所有可能的交互作用列构成的矩阵. $A \setminus A_1$ 表示在 A 中但不在 A_1 中的列. D_B 和 D_O 分别表示从 A_1 和 $A \setminus A_1$ 中选出的 n_1 列和 n_2 列.

定理 3.3 令 $D = (D_B, D_O)$, 其中 D_B 和 D_O 按上述方式构造. 则 $Q_2^O = 0$.

定理 3.3 表明, 两个 B 因子交互作用不对 O 因子主效应的估计产生偏差, 这意味着它们只影响 B 因子的主效应, 从而退化到基线参数化下的结论. 根据 Xia 等 [16] 的结论可知, Q_2^B 与 A_3^B 正相关, 其中 A_3^B 表示设计 D_B 中字长为 3 的定义字的个数.

例 3.2 考虑一个具有四个 B 因子和五个 O 因子的三水平设计. 对于 $s = 3, n = 9, n_1 = 4$, 有 $m > \max\{3, 2.68\}$ 且 $h = 3$. 当 $m = 4$ 时, A 是一个 $OA(81, 40, 3, 2)$, 且 $A_1 = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_1 a_2^2 a_3^2)$ 包含 13 列. 令 D_B 为从 A_1 中选择四列, D_O 为从 $A \setminus A_1$ 中选择五列. 则 D_B 共有 $\binom{13}{4} = 715$ 种可能选择, 这些选择产生 3 个不同的 A_3^B 值. 因此, 这些设计被相应地分为三类, 记为设计 I、II、III, 其中 Q_2^B 在各类设计内部相同但在不同类之间不同, 如下表所示.

表 3 表明, 根据定理 3.3 构造的设计确保了 O 因子主效应估计的偏差为零, 并进一步提供了一种为 D_B 选择列的方法, 即通过选择具有最小 A_3^B 的部分因析设计使得 B 因子主效应估计的偏差达

表 3 例 3.2 中 715 个设计的 A_3^B 、 Q_2^B 、 Q_2^O 值

设计	A_3^B	Q_2^B	Q_2^O
I	0	5.333	0
II	1	7.333	0
III	4	13.333	0

到最小.

3.1.2 只有 OO-型交互作用活跃的情形

当只有 OO-型交互作用活跃时,

$$Q_2^B = \text{tr}(B_2^\top B_2), \quad Q_2^O = \text{tr}(O_2^\top O_2),$$

其中 $B_2 = s(A_c Z_1^\top X_2)/N$, $O_2 = (X_1^\top X_2)/N$, 且 X_2 表示由所有 OO-型交互作用列构成的模型矩阵.

定理 3.4 令 D_O 为从 A_1 中选择的 n_2 列, D_B 为从 $A \setminus A_1$ 中选择的 n_1 列, 并定义 $D = (D_B, D_O)$. 则 $Q_2^B = 0$.

根据定理 3.4 可知, OO-型交互作用不对 B 因子主效应的估计引起任何偏差, 它们只影响 O 因子主效应的估计, 这对应于正交参数化的情形. 因此, 根据 Xu 和 Wu^[17] 可知, 最小化 Q_2^O 等价于最小化 A_3^O , 其中 A_3^O 是 D_O 中字长为 3 的定义字数.

例 3.3 延续例 3.2 的设置, 令 D_O 表示从 A_1 中选择的五列, D_B 表示从 $A \setminus A_1$ 中选择的四列. 在 D_O 的 $\binom{13}{5} = 1287$ 种可能选择中, A_3^O 有 3 个不同的取值. 因此, 这些设计可分为三类, 记为 I、II 和 III, 在同一类的设计内 Q_2^O 保持不变, 但在不同类间有所差异, 如下表所示.

表 4 例 3.3 中 1287 个设计的 A_3^O 、 Q_2^O 、 Q_2^B 值

设计	A_3^O	Q_2^O	Q_2^B
I	1	6	0
II	2	12	0
III	4	24	0

当只有 OO-型交互作用活跃时, 根据定理 3.4 构造出的设计, 可以实现对 B 因子主效应的无偏估计. 此外, 例 3.3 表明, 选择具有最小 A_3^O 值的设计可以得到最小的 Q_2^O . 在更高阶的 p 因子交互效应活跃且设计的 (Q_2^B, Q_2^O) 值相同的情况下, 则需要进一步比较设计的 (Q_p^B, Q_p^O) , $p = 3, \dots, n$.

3.2 p 因子交互作用活跃的情形

由 Q_p^B 和 Q_p^O 的定义可知, 二者都依赖于 $N \times \binom{n}{p}(s-1)^p$ 的矩阵 W_p . 其维数随着 n 和 p 迅速增长, 使得直接计算变得不切实际. 为了克服这一困难, 下面的定理给出了 Q_p^B 和 Q_p^O 的上界.

定理 3.5 设 D 为包含 n_1 个 B 因子和 $n_2 = n - n_1$ 个 O 因子的 $OA(N, n, s, 2)$. 则对 $p = 3, \dots, n$, 有

$$Q_p^B \leq \tilde{Q}_p^B = \frac{s^2}{N^2} \text{tr}(L_p R R^\top), \quad Q_p^O \leq \tilde{Q}_p^O = \frac{1}{N^2} \text{tr}(L_p X_1 X_1^\top), \quad (3.2)$$

其中 $L_p = \sum_{h_1, \dots, h_p \in H_p} W_1(h_1, \dots, h_p) W_1(h_1, \dots, h_p)^\top$, 且 $R = Z_1 A_c^\top - J^\top$. 特别地, 当 $s = 2$ 时, (3.2) 中的等号成立.

\tilde{Q}_p^B 是 Q_p^B 的一个上界, 这意味着 \tilde{Q}_p^B 值更小的设计往往具有更小的 Q_p^B 值. 这为获得具有较小 Q_p^B 值的设计提供了指导. 类似的结论也适用于 Q_p^O . 根据定理 3.5, \tilde{Q}_p^B 和 \tilde{Q}_p^O 的计算仅依赖于 W_1 , 而不涉及 W_p , 这不仅降低了存储需求, 而且还提高了计算效率. 此外, 通过利用 L_p 的迭代形式 (见命题 3.1), 可以进一步简化 \tilde{Q}_p^B 和 \tilde{Q}_p^O 的计算. 为了更清晰地陈述命题 3.1, 我们先介绍矩阵 Hadamard 积的定义.

定义 3.3 设 $A = (a_{ij})$ 和 $B = (b_{ij})$ 是两个同阶矩阵. 称 $C = (c_{ij})$ 为 A 与 B 的 Hadamard 积, 记作 $C = A \odot B$, 其中 $c_{ij} = a_{ij} b_{ij}$.

命题 3.1 对 $p = 2, \dots, n$, L_p 具有如下迭代形式

$$L_p = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p (-1)^{k-1} W_1^{[k]} W_1^{[k]\top} \odot L_{p-k},$$

其中 $W_1^{[k]}$ 是 W_1 的 k 重 Hadamard 积, 即 $W_1^{[k]}$ 的每个元素是 W_1 中对应元素的 k 次幂, 且 $L_0 = J_N$, $L_1 = W_1 W_1^\top$.

例 3.4 当 $p = 2$ 时, 有

$$L_2 = \frac{1}{2} W_1 W_1^\top \odot L_1 - \frac{1}{2} W_1^{[2]} W_1^{[2]\top} = \frac{1}{2} W_1 W_1^\top \odot W_1 W_1^\top - \frac{1}{2} W_1^{[2]} W_1^{[2]\top}.$$

当 $p = 3$ 时, 有

$$L_3 = \frac{1}{3} W_1 W_1^\top \odot L_2 - \frac{1}{3} W_1^{[2]} W_1^{[2]\top} \odot L_1 + \frac{1}{3} W_1^{[3]} W_1^{[3]\top}.$$

因此, 当 W_1 确定后, L_2 可以直接从 W_1 推导出来, 且 L_3 可通过 L_2 和 W_1 得到, 以此类推, 即 L_p , $p = 2, \dots, n$ 可通过这种高效的方式序贯计算, 极大地简化了 \tilde{Q}_p^B 和 \tilde{Q}_p^O 的计算过程.

4 混合参数化下最小低阶混杂设计的搜索算法

当 $s > 2$ 时, 基线参数化下寻找最小低阶混杂设计是具有挑战性的. B 因子和 O 因子的同时存在使问题进一步复杂化. 因此, 基于第 3 节的结论, 本节通过算法搜索来寻找混合参数化下两种不同类型的最小低阶混杂设计.

为了更清楚地阐述最小 Q_B 和 Q 低阶混杂设计的搜索算法, 首先介绍两个基本定义.

定义 4.1 (Hedayat 等^[6]) 称两个正交表是组合同构的, 如果一个正交表可以从另一个正交表通过行排列、列排列、一列或多列中的水平重新标记获得.

定义 4.2 (Yan 和 Zhao^[19]) 称两个正交表是基线同构的, 如果一个正交表可以从另一个正交表通过行排列、列排列、一列或多列中非基线水平的重新标记获得.

称导致设计基线同构的水平序为基线同构水平序, 并称所有其他水平序为基线非同构水平序. 根据基线同构的定义, 对于一个 s 水平设计, 只需考虑 s 种基线非同构水平序. 在本文中, 我们采用以

下 s 个水平序.

$$\begin{aligned}
\{0, 1, 2, \dots, (s-1)\} &\rightarrow \{0, 1, 2, \dots, (s-1)\}; \\
\{0, 1, 2, \dots, (s-1)\} &\rightarrow \{1, 0, 2, \dots, (s-1)\}; \\
&\vdots \\
\{0, 1, 2, \dots, (s-1)\} &\rightarrow \{1, 2, \dots, 0, (s-1)\}; \\
\{0, 1, 2, \dots, (s-1)\} &\rightarrow \{1, 2, \dots, (s-1), 0\}.
\end{aligned} \tag{4.1}$$

在混合参数化下, 传统的同构设计和基线同构设计不再具有相同的性质. 为了解决这个问题, 本文提出了一种新的设计同构概念, 称为混合参数同构.

定义 4.3 称两个设计是混合参数同构的, 如果一个设计可以从另一个设计通过行排列、列排列、B 因子列中非基线水平的重新标记或 O 因子列中水平的重新标记获得.

定理 4.1 两个混合参数同构的设计在最小 Q_B 混杂准则和最小 Q 混杂准则下有相同的表现.

下面的算法 1 展示了构造 s 水平近似最小 Q_B 和 Q 低阶混杂设计的具体过程.

算法 1 s 水平近似最小 Q_B 和 Q 低阶混杂设计的构造

- 1: 给定 N 和 n , 列出所有组合同构的 $OA(N, n, s, 2)$.
 - 2: 对于步骤 1 中的每个 $OA(N, n, s, 2)$, 考虑所有 $n!/(n_1!(n-n_1)!)$ 种可能的 n_1 列作为 B 因子的分配方案. 剩余的 $n_2 = n - n_1$ 列视为 O 因子.
 - 3: 对于步骤 2 得到的每种 B/O 因子分配方案, 通过将 (4.1) 中的水平序应用于一个或多个 B 因子列, 得到 s^{n_1} 个设计. 对于每一个得到的设计, 计算 (3.2) 中的 \tilde{Q}_p^B 、 \tilde{Q}_p^O 和 $\tilde{Q}_p^B + \tilde{Q}_p^O$, 其中 $p = 2, \dots, n$.
-

注 4.1 当 $s = 2$ 时, 对于 $p = 2, \dots, n$, 有 $Q_p^B = \tilde{Q}_p^B$ 且 $Q_p^O = \tilde{Q}_p^O$, 因此 Chen 和 Tang^[2] 中的完全搜索算法是算法 1 的一个特例. 换言之, 算法 1 将 Chen 和 Tang^[2] 中的完全搜索算法从两水平情形推广到了更一般的多水平设置, 从而扩展了混合参数化在更广泛的试验中的适用性.

注 4.2 在算法 1 中, 每个正交表可生成 $s^{n_1}n!/(n_1!(n-n_1)!)$ 种不同设计. 若存在 q 个非组合同构正交表, 则算法需计算 $s^{n_1}qn!/(n_1!(n-n_1)!)$ 个 \tilde{Q}_p^B 和 \tilde{Q}_p^O 的值. 尽管 \tilde{Q}_p^B 与 \tilde{Q}_p^O 的计算已被简化, 但当 s 、 n 、 n_1 或 q 较大时, 计算量仍可能较大. 为此, 本文采用随机抽样策略来降低计算负担: 对单个正交表, 其可能产生的设计数为 $s^{n_1}n!/(n_1!(n-n_1)!)$, 若该数超过 10^5 , 则不进行全枚举, 而是从 s^{n_1} 个水平序中随机抽样 r 个水平序, 其中 r 为满足 $rn!/(n_1!(n-n_1)!) \leq 10^5$ 的最大整数. 此时, 抽出的设计的数量级约为 $10^5 \times q$. 该抽样规模已覆盖设计空间的大部分, 所得结果在进行设计比较时具有较好的稳定性与代表性, 可实现在显著节省计算资源的同时, 识别出近似最优的设计.

5 结论与讨论

本文针对 $s \geq 3$ 的情形, 提出了一个在混合参数化下 s 水平因析设计的一般框架, 该研究推广了 Chen 和 Tang^[2] 在混合参数化下关于两水平设计的开创性工作. 通过建立正交、基线和混合三种参数化之间的联系, 为析效应建模提供了统一的视角. 本文进一步证明了在混合参数化下, s 水平正交表在主效应模型中对于平衡设计仍保持最优性. 此外, 本文为 s 水平设计提出了两个最小低阶混杂准则, 推导了它们的上界, 并开发了一个用于构建近似最优设计的搜索算法. 值得注意的是, 所推导

的上界具有迭代形式, 显著提高了本文算法的计算效率. 此外, 所提出的框架不仅将两水平作为一个特例纳入其中, 而且促进了在多水平试验中更灵活、更高效的设计构造.

本文主要研究对称水平设计, 而混合参数化下的混水平设计同样具有重要研究价值. 目前, 文中提出的框架可自然推广至混水平情形, 该方向的深入探讨计划在后续工作中展开. 除了向混水平试验的推广之外, 另一个值得进一步探索的方向是如何在含有交互效应的混合参数化模型中结合不同设计策略的优势. 例如, Xu 和 Wu^[17] 提出的最小低阶混杂设计可在正交参数化下最小化参数估计的偏差, 而一次一个因子设计能在基线参数化下实现参数的无偏估计. 因此, 未来的工作准备进一步探索在存在活跃交互效应的混合参数化框架下, 一次一个因子设计与最小低阶混杂设计相结合的复合设计是否具有良好的表现.

致谢 作者感谢审稿人给予的建设性意见.

参考文献

- 1 Banerjee T, Mukerjee R. Optimal factorial designs for cDNA microarray experiments. *Ann Appl Stat*, 2008, 2: 366–385
- 2 Chen G Z, Tang B. Minimum aberration factorial designs under a mixed parametrization. *Statist Sinica*, 2025, 35: 2433–2449
- 3 Cheng, C. S. Orthogonal arrays with variable numbers of symbols. *Ann Statist*, 1980, 8: 447–453
- 4 Cheng, C. S. *Theory of Factorial Design: Single-and Multi-Stratum Experiments*. New York: CRC Press, 2014
- 5 Glonek G F V, Solomon P J. Factorial and time course designs for cDNA microarray experiments. *Biostatistics*, 2004, 5: 89–111
- 6 Hedayat A S, Sloane N J, Stufken J. *Orthogonal Arrays: Theory and Applications*. New York: Springer, 1999
- 7 Li P, Miller A, Tang B. Algorithmic search for baseline minimum aberration designs. *J Statist Plann Inference*, 2014, 149: 172–182
- 8 Ma C X, Fang K T. A note on generalized aberration in factorial designs. *Metrika*, 2001, 53: 85–93
- 9 Miller A, Tang B. Using regular fractions of two-level designs to find baseline designs. *Statist Sinica*, 2016, 26: 745–759
- 10 Mukerjee R, Tang B. Optimal fractions of two-level factorials under a baseline parameterization. *Biometrika*, 2012, 99: 71–84
- 11 Mukerjee R, Tang B. Optimal two-level regular designs under baseline parameterization via cosets and minimum moment aberration. *Statist Sinica*, 2016, 26: 1001–1019
- 12 Mukerjee R, Wu C F J. *A Modern Theory of Factorial Designs*. New York: Springer, 2006
- 13 Sun C Y, Tang B. Relationship between orthogonal and baseline parameterizations and its applications to design constructions. *Statist Sinica*, 2022, 32: 239–250
- 14 Tang B, Deng L Y. Minimum G_2 -aberration for non-regular fractional factorial designs. *Ann Statist*, 1999, 27: 1914–1926
- 15 Wu C F J, Hamada M S. *Experiments: Planning, Analysis, and Optimization*. 3rd ed. Hoboken, New Jersey: Wiley, 2021
- 16 Xia X X, Sun F S, Wang C Y. Minimum aberration fractional factorial designs under baseline parameterization. *Statist Sinica*, in press
- 17 Xu H, Wu C F J. Generalized minimum aberration for asymmetrical fractional factorial designs. *Ann Statist*, 2001, 29: 1066–1077
- 18 Yan Z H, Zhao S L. Optimal fractions of three-level factorials under a baseline parameterization. *Statist Probab Lett*, 2023, 202: 109902
- 19 Yan Z H, Zhao S L. Optimal s -level fractional factorial designs under baseline parameterization. *J Statist Plann Inference*, 2025, 236: 106242
- 20 Yang Y H, Speed T. Design issues for cDNA microarray experiments. *Nat Genet*, 2002, 3: 579–588

附录 A 主要结果证明

定理 2.1 的证明 为了证明定理 2.1, 需要验证以下三种情形均成立.

(1) 如果在基线参数化下涉及 k 个或更多因子的交互效应可忽略, 那么它们在正交参数化和混合参数化下也可忽略.

(2) 如果在正交参数化下涉及 k 个或更多因子的交互效应可忽略, 那么它们在基线参数化和混合参数

化下也可忽略.

(3) 如果在混合参数化下涉及 k 个或更多因子的交互效应可忽略, 那么它们在基线参数化和正交参数化下也可忽略.

由于这三种情况的证明类似, 本文仅给出情况 (1) 的详细证明.

情况 (1) 的证明. 此处我们证明当 $k = 2$ 时结论成立, 即若在基线参数化下所有二阶及更高阶交互效应可忽略, 则在正交与混合参数化下相应的交互效应也是可忽略的. 对于 $k > 2$ 的情形, 证明过程完全类似, 因此不再叙述. 根据 Xia 等 [16] 中的引理 1, 如果在基线参数化下所有交互效应可忽略, 那么它们在正交参数化下也可忽略. 因此, 只需证明它们在混合参数化下也可忽略. 令 $\otimes_{k=1}^n B$ 表示 B 重复 n 次的克罗内克积. 则

$$\tau = \otimes_{k=1}^n P_s \tilde{\beta} = \otimes_{k=1}^n B_s \tilde{\theta} = (\otimes_{k=1}^{n_1} B_s) \otimes (\otimes_{k=1}^{n_2} P_s) \tilde{\zeta},$$

其中 P_s 是一个 $s \times s$ 的列正交矩阵, 其第一列为 $\mathbf{1}_s$, 且 $B_s = (\mathbf{1}_s, (\mathbf{0}_{s-1}, I_{s-1})^\top)^\top$. 因此, 矩阵 $P_s^{-1} B_s$ 和 $B_s^{-1} P_s$ 具有如下形式:

$$P_s^{-1} B_s = \begin{pmatrix} 1 & a_1^\top \\ \mathbf{0}_{s-1} & A_1 \end{pmatrix}, \quad B_s^{-1} P_s = \begin{pmatrix} 1 & a_2^\top \\ \mathbf{0}_{s-1} & A_2 \end{pmatrix},$$

其中 a_1 和 a_2 均为 $(s-1) \times 1$ 列向量, A_1 和 A_2 均为 $(s-1)$ 阶矩阵. 因此,

$$\tilde{\zeta} = I_{s^{n_1}} \otimes (\otimes_{k=1}^{n_2} (P_s^{-1} B_s)) \tilde{\theta}.$$

令 $P_s^{-1} B_s = (u_1^\top, \dots, u_s^\top)^\top$, 其中对 $i = 1, \dots, s$, 每个 u_i 是 $1 \times s$ 行向量. 且 u_1 的第一个元素为 1, u_2, \dots, u_s 的第一个元素为 0. 此外, 对于 $I_{s^{n_1}}$ 的第一列, 第一个元素为 1, 其余所有元素为 0. 因此, 对于矩阵 $I_{s^{n_1}} \otimes (\otimes_{k=1}^{n_2} (P_s^{-1} B_s))$ 的第一列来说, 第一个元素不为零, 而所有其他元素为零. 这一结构意味着 $\tilde{\zeta}$ 中的交互效应仅仅是 $\tilde{\theta}$ 中交互效应的线性组合, 即与 $\tilde{\theta}$ 中的主效应无关. 因此, 如果在基线参数化下所有交互效应可忽略, 那么在混合参数化下它们也可忽略. \square

为了证明定理 2.2, 首先引入以下引理.

引理 A.1 令 $Q = \begin{pmatrix} B & C \\ C^\top & E \end{pmatrix}$ 为一个分块矩阵. 如果子矩阵 B 非奇异, 则

$$|Q| = |B| |E - C^\top B^{-1} C|,$$

且

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} + B^{-1} C S^{-1} C^\top B^{-1} & B^{-1} C S^{-1} \\ -S^{-1} C^\top B^{-1} & S^{-1} \end{pmatrix},$$

其中 $S = E - C^\top B^{-1} C$.

定理 2.2 的证明 由模型 (2.4) 可知 $\text{var}(\hat{\zeta}) = (W^\top W)^{-1} \sigma^2$, 其中 $W = (\mathbf{1}_N, Z_1, X_1)$. 则

$$W^\top W = \begin{pmatrix} N & \mathbf{1}_N^\top Z_1 & \mathbf{1}_N^\top X_1 \\ Z_1^\top \mathbf{1}_N & Z_1^\top Z_1 & Z_1^\top X_1 \\ X_1^\top \mathbf{1}_N & X_1^\top Z_1 & X_1^\top X_1 \end{pmatrix} \quad \text{且} \quad (W^\top W)^{-1} = \begin{pmatrix} * & * \\ * & M^{-1} \end{pmatrix},$$

其中 * 代表不影响证明的项, 且当设计为平衡设计时,

$$M = \begin{pmatrix} Z_1^\top Z_1 - \frac{N}{s^2} J_{n_1} & Z_1^\top X_1 \\ X_1^\top Z_1 & X_1^\top X_1 \end{pmatrix}.$$

令 $B = Z_1^\top Z_1 - N/s^2 J_{n_1}$, $C = Z_1^\top X_1$, $E = X_1^\top X_1$. 由引理 A.1, 可得

$$\begin{aligned} \text{tr}(M^{-1}) &= \text{tr}(B^{-1}) + \text{tr}(B^{-1}CS^{-1}C^\top B^{-1}) + \text{tr}((E - C^\top B^{-1}C)^{-1}) \\ &\geq \text{tr}(B^{-1}) + \text{tr}(B^{-1}CS^{-1}C^\top B^{-1}) + \text{tr}(E^{-1}) \\ &\geq \text{tr}(B^{-1}) + \text{tr}(E^{-1}). \end{aligned}$$

当设计是一个 $OA(N, n, s, 2)$ 时, 可得 $C = Z_1^\top X_1 = \mathbf{0}$, 且上述两个不等式同时取等号. 进一步, 根据 Cheng [3] 和 Xia 等 [16] 中的定理 1, 在所有平衡设计中, 当设计是 $OA(N, n, s, 2)$ 时, $\text{tr}(B^{-1})$ 和 $\text{tr}(E^{-1})$ 同时达到最小值. 这意味着在所有平衡设计中, 当设计为正交表时 $\text{tr}(M^{-1})$ 取得最小值. 类似地, 在所有设计中, 当设计为正交表时 $|M|$ 取得最大值. \square

定理 3.1 的证明 当设计是一个强度为 $t (\geq 2)$ 的正交表时,

$$(W^\top W)_{-1}^{-1} = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} -s\mathbf{1}_{(s-1)n_1} & sA_c & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}_{(s-1)n_2} & \mathbf{0} & I_{(s-1)n_2} \end{pmatrix},$$

其中 $(W^\top W)_{-1}^{-1}$ 表示从 $(W^\top W)^{-1}$ 删去第一行后得到的矩阵. A_c 是一个阶数为 $(s-1)n_1$ 的块对角矩阵, 其对角线上的块为 $H = I_{s-1} + J_{s-1}$. 这里 I_{s-1} 是 $s-1$ 阶单位矩阵, J_{s-1} 是 $s-1$ 阶全一矩阵. 因此,

$$B_p = \frac{s}{N}(A_c Z_1^\top W_p - J W_p), \quad O_p = \frac{1}{N}(X_1^\top W_p),$$

其中 W_p 表示所有 p 因子交互效应对应的列构成的矩阵. 令 $W_p(B_{l_1}^{j_1} \dots B_{l_{p_1}}^{j_{p_1}} O_{f_1}^{i_1} \dots O_{f_{p_2}}^{i_{p_2}})$ 为 W_p 中的一列, 它对应于包含 p_1 个 B 因子 $B_{l_1}, \dots, B_{l_{p_1}}$ 和 $p_2 = p - p_1$ 个 O 因子 $O_{f_1}, \dots, O_{f_{p_2}}$ 的 p 因子交互作用. 这里 $B_{l_q}^{j_q}$ 表示对应于第 l_q 个 B 因子的第 j_q 个主效应, $O_{f_b}^{i_b}$ 表示对应于第 f_b 个 O 因子的第 i_b 个主效应, 其中 $l_q \in \{1, \dots, p_1\}$, 对每个 $q \in \{1, \dots, p_1\}$ 有 $j_q \in \{1, \dots, s-1\}$, 且 $f_b \in \{1, \dots, p_2\}$, 对每个 $b \in \{1, \dots, p_2\}$ 有 $i_b \in \{1, \dots, s-1\}$.

我们首先证明对于 $2 \leq p \leq t-1$ 有 $Q_p^B = p(s-1)^p \binom{n_1}{p} / s^{2p-2}$. 这里分别考虑 p_2 的两种不同情况.

情形 I: $p_2 \neq 0$, 这意味着在一个 p 因子交互作用中, 至少存在一个 O 因子. 对一个强度为 p 的正交表, 任意 p 列的所有水平组合均出现且出现次数相同, 即 $\frac{1}{N} W_p(B_{l_1}^{j_1} \dots B_{l_{p_1}}^{j_{p_1}} O_{f_1}^{i_1} \dots O_{f_{p_2}}^{i_{p_2}}) = 0$. 对强度为 $p+1$ 的正交表, 任意 $p+1$ 列的所有水平组合均等地出现, 则 $Z_1^\top W_p(B_{l_1}^{j_1} \dots B_{l_{p_1}}^{j_{p_1}} O_{f_1}^{i_1} \dots O_{f_{p_2}}^{i_{p_2}}) = \mathbf{0}_{n_1(s-1) \times 1}$.

情形 II: $p_2 = 0$, 所有因子都是 B 因子, 此时混合参数化退化为基线参数化.

综合以上两种情形及 Xia 等 [16] 的结论, 可得对 $p = 2, \dots, t-1$, 有 $Q_p^B = p(s-1)^p \binom{n_1}{p} / s^{2p-2}$.

接下来证明对 $2 \leq p \leq t-1$, $Q_p^O = n_2(s-1)^p \binom{n_1}{p-1} / s^{2p-2}$. 这里考虑 p_2 的以下三种可能情况.

情形 I: $p_2 = 0$, 这意味着参与该 p 因子交互效应的所有因子均为 B 因子. 由于任意 $p+1$ 列的所有水平组合出现的次数相同. 因此 $X_1^\top W_p(B_{l_1}^{j_1} \dots B_{l_p}^{j_p}) = \mathbf{0}_{n_2(s-1) \times 1}$.

情形 II: $p_2 = 1$, 假设该 p 因子交互效应为 $B_{l_1}^{j_1} \dots B_{l_{p-1}}^{j_{p-1}} O_{f_1}^{i_1}$, 则由 $B_{l_1}^{j_1} \dots B_{l_{p-1}}^{j_{p-1}} O_{f_1}^{i_1}$ 引起的 O 因子主效应估计的偏差可以表示为 $X_1^\top W_p(B_{l_1}^{j_1} \dots B_{l_{p-1}}^{j_{p-1}} O_{f_1}^{i_1})$. 根据强度为 $p+1$ 的正交表的性质可得, 在 $X_1^\top W_p(B_{l_1}^{j_1} \dots B_{l_{p-1}}^{j_{p-1}} O_{f_1}^{i_1})$ 中, 只有一个元素等于 N/s^{p-1} , 而所有其他元素均为零. 此外, 存在 $n_2 \binom{n_1}{p-1}$ 个

因子组合 $B_{l_1} \dots B_{l_{p-1}} O_{f_1}$ (其中 $l_1, \dots, l_{p-1} \in \{1, \dots, n_1\}, f_1 \in \{1, \dots, n_2\}$), 且每个因子组合对应 $(s-1)^p$ 个因析效应.

情形 III: $p_2 > 1$, 证明与情形 I 类似, 此处省略.

结合以上三种情形, 可得对 $p = 2, \dots, t-1$, 有 $Q_p^O = \text{tr}(O_p^\top O_p) = n_2(s-1)^p \binom{n_1}{p-1} / s^{2p-2}$. 接下来证 $Q_p^B = p(s-1)^p \binom{n_1}{p} / s^{2p-2}$ 和 $Q_p^O = n_2(s-1)^p \binom{n_1}{p-1} / s^{2p-2}$ 在所有正交表中达到最小. 由于强度为 $t+1$ 的正交表仍是强度为 t 的正交表, 那么当强度大于等于 t 的正交表作为混合参数化下的设计时, $Q_p^B = p(s-1)^p \binom{n_1}{p} / s^{2p-2}$ 和 $Q_p^O = n_2(s-1)^p \binom{n_1}{p-1} / s^{2p-2}$ 均成立, 下一步只需证明当正交表的强度小于 t 时, 对 $p = 2, \dots, t-1$, $Q_p^B \geq p(s-1)^p \binom{n_1}{p} / s^{2p-2}$ 和 $Q_p^O \geq n_2(s-1)^p \binom{n_1}{p-1} / s^{2p-2}$ 均成立.

首先, 证明当正交表的强度小于 t 时, 对 $p = 2, \dots, t-1$, $Q_p^B \geq p(s-1)^p \binom{n_1}{p} / s^{2p-2}$. 考虑 p_2 的两种不同情况.

情况 1: $p_2 \neq 0$, 对一个强度小于 t 的正交表, 任意 $p+1$ 列的所有水平组合出现的次数不完全相同, 即 $Z_1^\top W_p(B_{l_1}^{j_1} \dots B_{l_{p-1}}^{j_{p-1}} O_{f_1}^{i_1} \dots O_{f_{p-2}}^{i_{p-2}}) \neq \mathbf{0}_{n_1(s-1) \times 1}$, 此时可得对 $p = 2, \dots, t-1$, 有 $Q_p^B = \text{tr}(B_p^\top B_p) \geq 0$.

情况 2: $p_2 = 0$, 所有因子都是 B 因子, 此时混合参数化退化为基线参数化.

综合以上两种情形及 Xia 等 [16] 的结论, 可得当强度小于 t 的正交表用作设计时, 对 $p = 2, \dots, t-1$, 有 $Q_p^B \geq p(s-1)^p \binom{n_1}{p} / s^{2p-2}$. 类似的证明可应用到 $Q_p^O \geq n_2(s-1)^p \binom{n_1}{p-1} / s^{2p-2}$. \square

定理 3.2 的证明 根据定义,

$$\begin{aligned} Q_2^B &= \sum_{h_{l_1}^{j_1}, h_{l_2}^{j_2} \in H_2^1} \xi_1(h_{l_1}^{j_1}, h_{l_2}^{j_2})^\top \xi_1(h_{l_1}^{j_1}, h_{l_2}^{j_2}) \\ &= \sum_{h_1, h_2 \in H_2} \xi_1(h_1, h_2)^\top \xi_1(h_1, h_2) - \sum_{h_1, h_2 \in H_2 \setminus H_2^1} \xi_1(h_1, h_2)^\top \xi_1(h_1, h_2) \\ &= \frac{s^2}{N^2} \text{tr}(L_2 R R^\top) - \frac{s^2}{N^2} \sum_{h_1, h_2 \in H_2 \setminus H_2^1} \text{tr}(W_1(h_1, h_2) W_1(h_1, h_2)^\top R R^\top) \\ &= \frac{s^2}{N^2} \text{tr}(L_2 R R^\top), \end{aligned}$$

其中 $L_2 = \sum_{h_1, h_2 \in H_2} W_1(h_1, h_2) W_1(h_1, h_2)^\top$ 且 $R = Z_1 A_C^\top - J^\top$. 最后一个等式成立是因为当 $h_1, h_2 \in H_2 \setminus H_2^1$ 时, $W_1(h_1, h_2)^\top R = \mathbf{0}_{(s-1)n}^\top$.

$$\begin{aligned} Q_2^O &= \sum_{h_{l_1}^{j_1}, h_{l_2}^{j_2} \in H_2^1} \xi_2(h_{l_1}^{j_1}, h_{l_2}^{j_2})^\top \xi_2(h_{l_1}^{j_1}, h_{l_2}^{j_2}) \\ &= \sum_{h_1, h_2 \in H_2} \xi_2(h_1, h_2)^\top \xi_2(h_1, h_2) - \sum_{h_1, h_2 \in H_2 \setminus H_2^1} \xi_2(h_1, h_2)^\top \xi_2(h_1, h_2) \\ &= \frac{1}{N^2} \text{tr}(L_2 X_1 X_1^\top) - \frac{1}{N^2} \sum_{h_1, h_2 \in H_2 \setminus H_2^1} \text{tr}(W_1(h_1, h_2) W_1(h_1, h_2)^\top X_1 X_1^\top) \\ &= \frac{1}{N^2} \text{tr}(L_2 X_1 X_1^\top) - n_2 C. \end{aligned}$$

当 $h_1, h_2 \in H_2 \setminus H_2^1$ 且设计是一个强度为 2 的正交表时, $W_1(h_1, h_2)^\top X_1$ 中每个元素均与设计无关. \square

定理 3.3 的证明 由于 D_B 的列选自 A_1 , 而 D_O 的列选自 $A \setminus A_1$, 其中 A 由 m 个独立列 $a_1, \dots, a_h, a_{h+1}, \dots, a_m$ 及其所有可能的交互作用列组成, 因此 D_B 中的列仅与独立列 a_1, \dots, a_h 有关, 而 D_O 中的列只与 a_{h+1}, \dots, a_m 相关联. 因此, D_B 中的任意两列都与 D_O 中的任意列线性无关. 因此, $X_1^\top Z_2 = \mathbf{0}$, 进而 $Q_2^O = 0$. \square

定理 3.4 的证明 证明与定理 3.3 类似, 故省略. □

定理 3.5 的证明 证明与定理 3.2 类似, 故省略. □

命题 3.1 的证明 由于 $L_p = \sum_{h_1, \dots, h_p \in H_p} W_1(h_1, \dots, h_p)W_1(h_1, \dots, h_p)^\top$, 令 $L_p(u, v)$ 表示 L_p 的第 (u, v) 个元素. 则

$$L_p(u, v) = \sum_{\{h_1, \dots, h_p\} \in H_p} \prod_{k=1}^p W_1(u, h_k)W_1(v, h_k),$$

其中 $W_1(u, h_k)$ 表示 W_1 的第 (u, h_k) 个元素.

定义 $\alpha_{h_k} = W_1(u, h_k)W_1(v, h_k)$, 则 $L_p(u, v) = \sum_{\{h_1, \dots, h_p\} \in H_p} \prod_{k=1}^p \alpha_{h_k}$. 根据牛顿恒等式, 可得

$$\alpha_1^p + \dots + \alpha_{(s-1)n}^p = (-1)^{p-1} p \sum_{H_p} \alpha_{h_1} \dots \alpha_{h_p} + \sum_{k=1}^{p-1} (-1)^{p-1+k} \sum_{H_{p-k}} \alpha_{h_1} \dots \alpha_{h_{p-k}} (\alpha_1^k + \dots + \alpha_{(s-1)n}^k).$$

令 $W_1(u, \cdot)$ 表示 W_1 的第 u 行, 即 $W_1(u, \cdot) = [W_1(u, 1), \dots, W_1(u, (s-1)n)]$. 则有,

$$W_1(u, \cdot)^{[p]} \left(W_1(v, \cdot)^{[p]} \right)^\top = (-1)^{p-1} p L_p(u, v) + \sum_{k=1}^{p-1} (-1)^{p-1+k} L_{p-k}(u, v) W_1(u, \cdot)^{[k]} \left(W_1(v, \cdot)^{[k]} \right)^\top.$$

于是,

$$(-1)^p p L_p(u, v) = \sum_{k=1}^{p-1} (-1)^{p-1+k} L_{p-k}(u, v) W_1(u, \cdot)^{[k]} \left(W_1(v, \cdot)^{[k]} \right)^\top - W_1(u, \cdot)^{[p]} \left(W_1(v, \cdot)^{[p]} \right)^\top.$$

$$\begin{aligned} L_p(u, v) &= \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p-1} (-1)^{k-1} L_{p-k}(u, v) W_1(u, \cdot)^{[k]} \left(W_1(v, \cdot)^{[k]} \right)^\top - \frac{1}{p} (-1)^p W_1(u, \cdot)^{[p]} \left(W_1(v, \cdot)^{[p]} \right)^\top \\ &= \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p (-1)^{k-1} L_{p-k}(u, v) W_1(u, \cdot)^{[k]} \left(W_1(v, \cdot)^{[k]} \right)^\top \end{aligned}$$

因此, $L_p = 1/p \sum_{k=1}^p (-1)^{k-1} L_{p-k} \odot W_1^{[k]} W_1^{[k]\top}$. □

定理 4.1 的证明 首先, Q_p^B 和 Q_p^O 的值在行排列和列排列下保持不变. 因此接下来聚焦于证明 Q_p^B 和 Q_p^O 在以下两个操作中也是不变的: (i) 对 O 因子重新标记水平; (ii) 对 B 因子应用基线同构水平序.

根据定义 $Q_p^B = \text{tr}(B_p^\top B_p)$ 和 $Q_p^O = \text{tr}(O_p^\top O_p)$, 其中 $B_p = s/NR^\top W_p$, $R = Z_1 A_c^\top - J^\top$, W_p 是对应于所有可能 p 因子交互效应的模型矩阵, 且 $O_p = 1/NX_1^\top W_p$, 由此可得 $Q_p^B = s^2/N^2 \text{tr}(W_p W_p^\top R R^\top)$, 以及 $Q_p^O = 1/N^2 \text{tr}(W_p W_p^\top X_1 X_1^\top)$. 因此, 接下来证明对 O 因子进行水平排列或对 B 因子应用基线同构水平排列不会改变 $W_p W_p^\top$ 、 $R R^\top$ 和 $X_1 X_1^\top$ 的值.

(i) 由于 $R = Z_1 A_c^\top - J^\top$ 与 O 因子无关, 只需要证明当 O 因子的水平改变时, $W_p W_p^\top$ 和 $X_1 X_1^\top$ 保持不变. 设 $D = (D_B, D_O)$ 是包含 n_1 个 B 因子和 n_2 个 O 因子的设计, 并令 X_1 为 n_2 个 O 因子的主效应模型矩阵. 假设 D_O 的第 u 行和第 v 行之间的 Hamming 距离满足

$$d_H(D_O[u, \cdot], D_O[v, \cdot]) = r,$$

其中 $D_O[u, \cdot]$ 表示设计 D_O 的第 u 行. 对于一个标准化的 s 阶正交对照矩阵 P_s , 有 $P_s P_s^\top = sI_s$. 令 $X_1 X_1^\top$ 的第 (u, v) 个元素为 $X_1 X_1^\top_{uv}$, 则 $X_1 X_1^\top_{uv} = (n_2 - r)(s - 1) - r$. 即 $X_1 X_1^\top$ 的元素仅取决于设计

D_O 的 Hamming 距离. 此外, 改变设计 D 中 O 因子的水平不会影响设计 D 最后 n_2 列的 Hamming 距离. 因此, $X_1 X_1^\top$ 保持不变. 同样地, 当 O 因子的水平改变时, $W_p W_p^\top$ 也保持不变.

(ii) 证明当对 B 因子应用基线同构水平排列时, Q_p^B 和 Q_p^O 保持不变. 令 Z_1 为前 n_1 个 B 因子的主效应模型矩阵. 则

$$RR^\top = Z_1 A_c^\top A_c Z_1^\top - Z_1 A_c^\top J - J^\top A_c Z_1^\top + n_1(s-1)J_N.$$

由于 A_c 是一个阶数为 $(s-1)n_1$ 的块对角矩阵, 其对角线上的块均为 $H = I_{s-1} + J_{s-1}$, 因此可得

- $A_c^\top A_c$ 是阶数为 $(s-1)n_1$ 的块对角矩阵, 其对角线上的块为 $I_{s-1} + (s+1)J_{s-1}$;
- $A_c^\top J = J^\top A_c = bJ$, 其中 b 为某个常数.

此外, $Z_1 A_c^\top J = bZ_1 J$ 仅取决于设计 D_B 各行中非零水平的个数, 因此在基线同构水平排列下保持不变.

为了证明 $Z_1 A_c^\top A_c Z_1^\top$ 在基线同构水平排列下的不变性, 将 Z_1 划分为 $(Z_1^1, Z_1^2, \dots, Z_1^{n_1})$, 其中每个 Z_1^j 是一个 $N \times (s-1)$ 矩阵 ($j = 1, \dots, n_1$). 由此得到

$$Z_1 A_c^\top A_c Z_1^\top = \sum_{j=1}^{n_1} G_j \quad \text{其中} \quad G_j = Z_1^j [I_{s-1} + (s+1)J_{s-1}] (Z_1^j)^\top.$$

则,

$$G_j = Z_1^j (Z_1^j)^\top + (s+1) \left(Z_1^j \mathbf{1}_{s-1} \right) \left(Z_1^j \mathbf{1}_{s-1} \right)^\top.$$

$Z_1^j (Z_1^j)^\top$ 和 $Z_1^j \mathbf{1}_{s-1}$ 两者在设计 D_B 的基线同构水平排列下都是不变的. 则 G_j 和 $Z_1 A_c^\top A_c Z_1^\top$ 在基线同构水平排列下也是不变的. 因此, 对 D_B 应用任何基线同构水平排列后 RR^\top 保持不变. 类似地, $W_p W_p^\top$ 在基线同构水平排列下也是不变的. 此外, 由于 X_1 仅依赖于 O 因子, $X_1 X_1^\top$ 在对 B 因子应用基线同构排列后保持不变. \square

附录 B 近似最小低阶混杂设计

在附录 B 中, 我们列出了 $N = 9, 18$ 次试验的三水平近似最小 Q_B 和 Q 低阶混杂设计、 $N = 16$ 次试验的四水平近似最小 Q_B 和 Q 低阶混杂设计, 以及 $N = 25$ 次试验的五水平近似最小 Q_B 和 Q 低阶混杂设计.

近似最小 Q_B 低阶混杂设计

首先, 表 B.1-B.4 给出了 $N = 9, 18, 16, 25$ 次试验, n 个因子, 其中包含 n_1 个 B 因子的 π_2^B 和 π_2^O 值.

表 B.1 9 次试验的近似最小 Q_B 低阶混杂设计的 π_2^B 和 π_2^O 值

n	$n = 3$		$n = 4$		
n_1	$n_1 = 1$	$n_1 = 2$	$n_1 = 1$	$n_1 = 2$	$n_1 = 3$
(π_2^B, π_2^O)	(12,2.78)	(6.22,1.49)	(36,11.5)	(35.56,4.75)	(20.33,2.13)

表 B.2 18 次试验的近似最小 Q_B 低阶混杂设计的 π_2^B 和 π_2^O 值

n	$n = 3$		$n = 4$		
n_1	$n_1 = 1$	$n_1 = 2$	$n_1 = 1$	$n_1 = 2$	$n_1 = 3$
(π_2^B, π_2^O)	(3,2.11)	(2.22,1.41)	(9,5)	(9.56,3.27)	(7,1.91)
n	$n = 5$				$n = 6$
n_1	$n_1 = 1$	$n_1 = 2$	$n_1 = 3$	$n_1 = 4$	$n_1 = 1$
(π_2^B, π_2^O)	(18,11.11)	(22.89,7.07)	(20.08,4.48)	(15,2.43)	(30,21.94)
n	$n = 6$				$n = 7$
n_1	$n_1 = 2$	$n_1 = 3$	$n_1 = 4$	$n_1 = 5$	$n_1 = 1$
(π_2^B, π_2^O)	(42.22,14.32)	(42.08,9.22)	(35,5.74)	(26.39,2.97)	(54,48.67)
n	$n = 7$				
n_1	$n_1 = 2$	$n_1 = 3$	$n_1 = 4$	$n_1 = 5$	$n_1 = 6$
(π_2^B, π_2^O)	(71.56,35.59)	(84.17,22.91)	(71.33,16.17)	(61.56,7.49)	(47.25,3.65)

表 B.3 16 次试验的近似最小 Q_B 低阶混杂设计的 π_2^B 和 π_2^O 值

n	$n = 3$		$n = 4$		
n_1	$n_1 = 1$	$n_1 = 2$	$n_1 = 1$	$n_1 = 2$	$n_1 = 3$
(π_2^B, π_2^O)	(24,6.97)	(10.13,3.59)	(72,21.14)	(67.13,9.43)	(32.81,4.36)
n	$n = 5$				
n_1	$n_1 = 1$	$n_1 = 2$	$n_1 = 3$	$n_1 = 4$	
(π_2^B, π_2^O)	(144,54.44)	(172.13,26.52)	(131.81,12.10)	(70.5,5.24)	

表 B.4 25 次试验的近似最小 Q_B 低阶混杂设计的 π_2^B 和 π_2^O 值

n	$n = 3$		$n = 4$		
n_1	$n_1 = 1$	$n_1 = 2$	$n_1 = 1$	$n_1 = 2$	$n_1 = 3$
(π_2^B, π_2^O)	(40,12.04)	(14.08,6.12)	(120,31.98)	(106.88,14.80)	(45.24,6.97)
n	$n = 5$				
n_1	$n_1 = 1$	$n_1 = 2$	$n_1 = 3$	$n_1 = 4$	
(π_2^B, π_2^O)	(240,77.20)	(279.68,38.04)	(203.64,17.77)	(96.48,7.91)	
n	$n = 6$				
n_1	$n_1 = 1$	$n_1 = 2$	$n_1 = 3$	$n_1 = 4$	$n_1 = 5$
(π_2^B, π_2^O)	(400,159.69)	(532.48,87.84)	(482.04,44.42)	(333.28,20.95)	(170.80,8.96)

接下来, 表 B.5-B.8 分别给出 9 和 18 次试验的三水平、16 次试验的四水平以及 25 次试验的五水平的近似最小 Q_B 低阶混杂设计.

表 B.5 具有 n 个因子 (其中 n_1 个为 B 因子)、9 次试验的近似最小 Q_B 低阶混杂设计

试验号	3-1			3-2			4-1				4-2				4-3				
1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	1	0	0
2	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1
3	0	2	2	2	2	0	2	0	2	2	0	0	2	2	0	2	2	2	2
4	1	0	1	1	1	1	1	1	0	2	1	0	0	1	1	1	1	2	2
5	1	1	2	0	2	1	2	1	1	0	1	2	1	2	1	0	2	0	0
6	1	2	0	2	0	1	0	1	2	1	1	1	2	0	1	2	0	1	1
7	2	0	2	1	2	2	2	2	0	1	2	1	0	2	2	1	2	1	1
8	2	1	0	0	0	2	0	2	1	2	2	0	1	0	2	0	0	2	2
9	2	2	1	2	1	2	1	2	2	0	2	2	2	1	2	2	1	0	0

注: $n - n_1$ 表示一个具有 n 个因子、其中 n_1 个为 B 因子的设计.

表 B.6 具有 n 个因子 (其中 n_1 个为 B 因子)、18 次试验的近似最小 Q_B 低阶混杂设计

试验号	3-1	3-2	4-1	4-2	4-3	5-1	5-2	5-3	5-4
1	0 0 0	0 0 0	1 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	1 2 0 0 0	0 0 1 1 0
2	0 0 1	0 0 1	1 0 1 1	0 1 0 1	0 0 0 0	0 0 1 1 1	0 0 1 1 1	1 2 1 1 1	0 0 0 0 1
3	0 1 0	0 1 0	0 0 0 1	0 0 1 1	0 1 1 1	1 0 0 1 2	0 1 0 1 2	1 1 0 1 2	0 1 0 2 0
4	0 1 2	0 1 2	0 0 2 2	0 2 1 2	0 1 2 2	1 0 2 2 0	0 1 2 2 0	1 1 2 2 0	0 1 2 1 2
5	0 2 1	0 2 1	2 0 1 2	0 1 2 2	0 2 1 2	2 0 1 2 2	0 2 1 2 2	1 0 1 2 2	0 2 2 2 1
6	0 2 2	0 2 2	2 0 2 0	0 2 2 0	0 2 2 1	2 0 2 0 1	0 2 2 0 1	1 0 2 0 1	0 2 1 0 2
7	1 0 0	1 0 0	1 1 0 2	1 0 0 2	1 0 1 1	0 1 0 2 2	1 0 0 2 2	0 2 0 2 2	1 0 2 2 0
8	1 0 2	1 0 2	1 1 2 1	1 2 0 1	1 0 2 2	0 1 2 1 0	1 0 2 1 0	0 2 2 1 0	1 0 0 1 2
9	1 1 1	1 1 1	0 1 1 2	1 1 1 2	1 1 0 1	1 1 1 2 1	1 1 1 2 1	0 1 1 2 1	1 1 2 0 1
10	1 1 2	1 1 2	0 1 2 0	1 2 1 0	1 1 1 0	1 1 2 0 2	1 1 2 0 2	0 1 2 0 2	1 1 1 2 2
11	1 2 0	1 2 0	2 1 0 1	1 0 2 1	1 2 0 2	2 1 0 1 1	1 2 0 1 1	0 0 0 1 1	1 2 0 0 0
12	1 2 1	1 2 1	2 1 1 0	1 1 2 0	1 2 2 0	2 1 1 0 0	1 2 1 0 0	0 0 1 0 0	1 2 1 1 1
13	2 0 1	2 0 1	1 2 1 0	2 1 0 0	2 0 1 2	0 2 1 0 2	2 0 1 0 2	2 2 1 0 2	2 0 1 2 1
14	2 0 2	2 0 2	1 2 2 2	2 2 0 2	2 0 2 1	0 2 2 2 1	2 0 2 2 1	2 2 2 2 1	2 0 2 0 2
15	2 1 0	2 1 0	0 2 0 0	2 0 1 0	2 1 0 2	1 2 0 0 1	2 1 0 0 1	2 1 0 0 1	2 1 1 0 0
16	2 1 1	2 1 1	0 2 1 1	2 1 1 1	2 1 2 0	1 2 1 1 0	2 1 1 1 0	2 1 1 1 0	2 1 0 1 1
17	2 2 0	2 2 0	2 2 0 2	2 0 2 2	2 2 0 1	2 2 0 2 0	2 2 0 2 0	2 0 0 2 0	2 2 2 1 0
18	2 2 2	2 2 2	2 2 2 1	2 2 2 1	2 2 1 0	2 2 2 1 2	2 2 2 1 2	2 0 2 1 2	2 2 0 2 2

表 B.6 具有 n 个因子 (其中 n_1 个为 B 因子)、18 次试验的近似最小 Q_B 低阶混杂设计

试验号	6-1	6-2	6-3	6-4	6-5
1	2 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 1 0 0 0	0 0 1 1 0 0	0 0 2 2 1 0
2	1 0 0 1 1 1	0 0 1 1 1 1	0 0 0 1 1 1	0 0 0 0 1 1	0 1 1 1 0 0
3	1 0 1 0 2 2	0 1 0 1 2 2	0 1 2 0 1 2	0 1 0 2 0 2	1 0 1 0 2 0
4	0 0 1 2 0 1	0 1 2 2 0 1	0 1 1 2 2 1	0 1 2 0 2 0	1 2 0 2 0 0
5	0 0 2 1 2 0	0 2 1 2 2 0	0 2 2 1 2 0	0 2 2 1 1 2	2 1 0 0 1 0
6	2 0 2 2 1 2	0 2 2 0 1 2	0 2 0 2 0 2	0 2 1 2 2 1	2 2 2 1 2 0
7	0 1 0 0 2 1	1 0 0 2 2 1	1 0 2 0 2 1	1 0 2 0 0 2	0 0 0 0 0 1
8	1 1 0 2 0 2	1 0 2 1 0 2	1 0 1 2 1 2	1 0 0 2 2 0	0 2 1 2 2 1
9	0 1 1 1 1 2	1 1 1 2 1 2	1 1 0 1 2 2	1 1 2 2 1 1	1 1 0 1 2 1
10	2 1 1 2 2 0	1 1 2 0 2 0	1 1 2 2 0 0	1 1 1 1 2 2	1 2 2 0 1 1
11	1 1 2 0 1 0	1 2 0 1 1 0	1 2 0 0 1 0	1 2 0 1 0 1	2 0 1 1 1 1
12	2 1 2 1 0 1	1 2 1 0 0 1	1 2 1 1 0 1	1 2 1 0 1 0	2 1 2 2 0 1
13	2 2 0 1 2 2	2 0 1 0 2 2	2 0 2 1 0 2	2 0 1 2 1 2	0 1 2 0 2 2
14	0 2 0 2 1 0	2 0 2 2 1 0	2 0 0 2 2 0	2 0 2 1 2 1	0 2 0 1 1 2
15	2 2 1 0 1 1	2 1 0 0 1 1	2 1 0 0 0 1	2 1 1 0 0 1	1 0 2 1 0 2
16	1 2 1 1 0 0	2 1 1 1 0 0	2 1 1 1 1 0	2 1 0 1 1 0	1 1 1 2 1 2
17	0 2 2 0 0 2	2 2 0 2 0 2	2 2 1 0 2 2	2 2 2 2 0 0	2 0 0 2 2 2
18	1 2 2 2 2 1	2 2 2 1 2 1	2 2 2 2 1 1	2 2 0 0 2 2	2 2 1 0 0 2

表 B.6 具有 n 个因子 (其中 n_1 个为 B 因子)、18 次试验的近似最小 Q_B 低阶混杂设计

试验号	7-1	7-2	7-3	7-4	7-5	7-6
1	0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0	1 0 0 0 0 0 0	0 0 1 1 0 0 0	2 2 2 1 1 0 0	2 0 0 2 0 0 0
2	1 0 0 0 1 1 1	0 0 0 1 1 1 1	0 1 1 0 0 0 1	1 1 0 0 0 0 0	2 2 2 0 0 1 1	2 0 0 1 1 1 1
3	2 0 1 1 0 0 2	1 1 0 0 0 2 2	1 2 2 0 1 1 0	0 0 2 2 0 1 1	2 1 1 2 2 0 0	2 1 1 2 0 2 2
4	1 0 1 1 2 2 1	1 1 0 2 2 1 1	2 1 1 0 1 1 2	2 2 0 0 0 1 1	2 1 1 0 0 2 2	2 1 1 0 2 1 1
5	2 0 2 2 1 1 2	2 2 0 1 1 2 2	0 2 2 0 2 2 1	1 1 2 2 0 2 2	2 0 0 2 2 1 1	2 2 2 1 2 0 2
6	0 0 2 2 2 2 0	2 2 0 2 2 0 0	2 0 0 0 2 2 2	2 2 1 1 0 2 2	2 0 0 1 1 2 2	2 2 2 0 1 2 0
7	2 1 0 1 1 2 0	0 1 1 1 2 0 2	0 0 2 1 0 1 2	1 2 1 2 1 0 1	1 2 1 1 2 1 2	1 0 1 1 1 2 2
8	0 1 0 1 2 1 2	0 1 1 2 1 2 0	2 2 0 1 0 1 1	2 1 2 1 1 0 1	1 2 1 2 1 2 1	1 0 1 0 2 0 0
9	1 1 1 2 0 1 0	1 2 1 0 1 1 0	1 0 1 1 1 2 1	0 1 1 0 1 1 2	1 1 0 1 0 0 1	1 1 2 2 1 0 1
10	0 1 1 2 1 0 1	1 2 1 1 0 0 1	0 1 0 1 1 2 0	1 0 0 1 1 1 2	1 1 0 0 1 1 0	1 1 2 1 0 1 0
11	2 1 2 0 0 2 1	2 0 1 0 2 1 2	1 1 2 1 2 0 2	0 2 0 2 1 2 0	1 0 2 0 2 0 2	1 2 0 2 2 2 1
12	1 1 2 0 2 0 2	2 0 1 2 0 2 1	2 2 1 1 2 0 0	2 0 2 0 1 2 0	1 0 2 2 0 2 0	1 2 0 0 0 1 2
13	1 2 0 2 0 2 2	0 2 2 0 2 2 1	1 2 1 2 0 2 2	0 2 2 0 2 0 2	0 2 0 2 0 0 2	0 0 2 2 2 1 2
14	2 2 0 2 2 0 1	0 2 2 2 0 1 2	2 1 2 2 0 2 0	2 0 0 2 2 0 2	0 2 0 0 2 2 0	0 0 2 0 0 2 1
15	0 2 1 0 1 2 2	1 0 2 1 2 2 0	0 2 0 2 1 0 2	1 2 2 1 2 1 0	0 1 2 2 1 1 2	0 1 0 1 2 2 0
16	2 2 1 0 2 1 0	1 0 2 2 1 0 2	2 0 2 2 1 0 1	2 1 1 2 2 1 0	0 1 2 1 2 2 1	0 1 0 0 1 0 2
17	0 2 2 1 0 1 1	2 1 2 0 1 0 1	1 1 0 2 2 1 1	0 1 0 1 2 2 1	0 0 1 0 1 0 1	0 2 1 2 1 1 0
18	1 2 2 1 1 0 0	2 1 2 1 0 1 0	0 0 1 2 2 1 0	1 0 1 0 2 2 1	0 0 1 1 0 1 0	0 2 1 1 0 0 1

表 B.7 具有 n 个因子 (其中 n_1 个为 B 因子)、16 次试验的近似最小 Q_B 低阶混杂设计

试验号	3-1	3-2	4-1	4-2	4-3	5-1	5-2	5-3	5-4
1	0 0 0	0 2 0	0 0 0 0	2 0 0 0	1 0 0 0	0 0 0 0 0	0 2 0 0 0	0 2 0 0 0	1 2 0 2 0
2	0 1 1	0 1 1	1 0 1 1	2 1 1 1	1 1 1 1	1 0 1 1 1	0 1 1 1 1	0 1 1 1 1	1 1 1 1 1
3	0 2 2	0 0 2	2 0 2 2	2 2 2 2	1 2 2 2	2 0 2 2 2	0 0 2 2 2	0 0 2 2 2	1 0 2 0 2
4	0 3 3	0 3 3	3 0 3 3	2 3 3 3	1 3 3 3	3 0 3 3 3	0 3 3 3 3	0 3 3 3 3	1 3 3 3 3
5	1 0 1	1 2 1	2 1 0 1	1 1 0 2	0 0 1 2	0 1 1 2 3	1 3 0 1 2	1 2 1 2 3	0 2 1 0 3
6	1 1 0	1 1 0	3 1 1 0	1 0 1 3	0 1 0 3	1 1 0 3 2	1 0 1 0 3	1 1 0 3 2	0 1 0 3 2
7	1 2 3	1 0 3	0 1 2 3	1 3 2 0	0 2 3 0	2 1 3 0 1	1 1 2 3 0	1 0 3 0 1	0 0 3 2 1
8	1 3 2	1 3 2	1 1 3 2	1 2 3 1	0 3 2 1	3 1 2 1 0	1 2 3 2 1	1 3 2 1 0	0 3 2 1 0
9	2 0 2	2 2 2	3 2 0 2	0 2 0 3	2 0 2 3	0 2 2 3 1	2 1 0 2 3	2 2 2 3 1	2 2 2 3 1
10	2 1 3	2 1 3	2 2 1 3	0 3 1 2	2 1 3 2	1 2 3 2 0	2 2 1 3 2	2 1 3 2 0	2 1 3 0 0
11	2 2 0	2 0 0	1 2 2 0	0 0 2 1	2 2 0 1	2 2 0 1 3	2 3 2 0 1	2 0 0 1 3	2 0 0 1 3
12	2 3 1	2 3 1	0 2 3 1	0 1 3 0	2 3 1 0	3 2 1 0 2	2 0 3 1 0	2 3 1 0 2	2 3 1 2 2
13	3 0 3	3 2 3	1 3 0 3	3 3 0 1	3 0 3 1	0 3 3 1 2	3 0 0 3 1	3 2 3 1 2	3 2 3 1 2
14	3 1 2	3 1 2	0 3 1 2	3 2 1 0	3 1 2 0	1 3 2 0 3	3 3 1 2 0	3 1 2 0 3	3 1 2 2 3
15	3 2 1	3 0 1	3 3 2 1	3 1 2 3	3 2 1 3	2 3 1 3 0	3 2 2 1 3	3 0 1 3 0	3 0 1 3 0
16	3 3 0	3 3 0	2 3 3 0	3 0 3 2	3 3 0 2	3 3 0 2 1	3 1 3 0 2	3 3 0 2 1	3 3 0 0 1

表 B.8 具有 n 个因子 (其中 n_1 个为 B 因子)、25 次试验的近似最小 Q_B 低阶混杂设计

试验号	3-1	3-2	4-1	4-2	4-3	5-1	5-2	5-3	5-4
1	0 0 0	1 0 0	0 0 0 0	1 2 0 0	0 0 1 0	0 0 0 0 0	2 0 0 0 0	0 1 1 0 0	2 2 1 1 0
2	0 1 1	1 1 1	0 1 1 1	0 1 0 1	1 1 0 0	1 0 1 1 1	1 1 0 1 1	1 0 0 0 1	2 1 0 0 1
3	0 2 2	1 2 2	0 2 2 2	2 0 0 2	2 2 2 0	2 0 2 2 2	0 2 0 2 2	2 2 2 0 2	2 0 2 2 2
4	0 3 3	1 3 3	0 3 3 3	3 3 0 3	3 3 3 0	3 0 3 3 3	3 3 0 3 3	3 3 3 0 3	2 3 3 3 3
5	0 4 4	1 4 4	0 4 4 4	4 4 0 4	4 4 4 0	4 0 4 4 4	4 4 0 4 4	4 4 4 0 4	2 4 4 4 4
6	1 0 1	0 0 1	1 0 1 2	1 1 1 2	0 1 2 1	3 1 0 1 2	2 1 1 2 3	0 0 2 1 3	1 2 0 3 2
7	1 1 0	0 1 0	1 1 2 3	0 0 1 3	1 2 3 1	4 1 1 2 3	1 2 1 3 4	1 2 3 1 4	1 1 2 4 3
8	1 2 3	0 2 3	1 2 3 4	2 3 1 4	2 3 4 1	0 1 2 3 4	0 3 1 4 0	2 3 4 1 0	1 0 3 1 4
9	1 3 4	0 3 4	1 3 4 0	3 4 1 0	3 4 1 1	1 1 3 4 0	3 4 1 0 1	3 4 1 1 1	1 3 4 0 0
10	1 4 2	0 4 2	1 4 0 1	4 2 1 1	4 0 0 1	2 1 4 0 1	4 0 1 1 2	4 1 0 1 2	1 4 1 2 1
11	2 0 2	2 0 2	2 0 2 4	1 0 2 4	0 2 4 2	1 2 0 2 4	2 2 2 4 1	0 2 4 2 1	0 2 2 0 4
12	2 1 3	2 1 3	2 1 3 0	0 3 2 0	1 3 1 2	2 2 1 3 0	1 3 2 0 2	1 3 1 2 2	0 1 3 2 0
13	2 2 4	2 2 4	2 2 4 1	2 4 2 1	2 4 0 2	3 2 2 4 1	0 4 2 1 3	2 4 0 2 3	0 0 4 3 1
14	2 3 0	2 3 0	2 3 0 2	3 2 2 2	3 0 2 2	4 2 3 0 2	3 0 2 2 4	3 1 2 2 4	0 3 1 4 2
15	2 4 1	2 4 1	2 4 1 3	4 1 2 3	4 1 3 2	0 2 4 1 3	4 1 2 3 0	4 0 3 2 0	0 4 0 1 3
16	3 0 3	3 0 3	3 0 3 1	1 3 3 1	0 3 0 3	4 3 0 3 1	2 3 3 1 4	0 3 0 3 4	3 2 3 4 1
17	3 1 4	3 1 4	3 1 4 2	0 4 3 2	1 4 2 3	0 3 1 4 2	1 4 3 2 0	1 4 2 3 0	3 1 4 1 2
18	3 2 1	3 2 1	3 2 0 3	2 2 3 3	2 0 3 3	1 3 2 0 3	0 0 3 3 1	2 1 3 3 1	3 0 1 0 3
19	3 3 2	3 3 2	3 3 1 4	3 1 3 4	3 1 4 3	2 3 3 1 4	3 1 3 4 2	3 0 4 3 2	3 3 0 2 4
20	3 4 0	3 4 0	3 4 2 0	4 0 3 0	4 2 1 3	3 3 4 2 0	4 2 3 0 3	4 2 1 3 3	3 4 2 3 0
21	4 0 4	4 0 4	4 0 4 3	1 4 4 3	0 4 3 4	2 4 0 4 3	2 4 4 3 2	0 4 3 4 2	4 2 4 2 3
22	4 1 2	4 1 2	4 1 0 4	0 2 4 4	1 0 4 4	3 4 1 0 4	1 0 4 4 3	1 1 4 4 3	4 1 1 3 4
23	4 2 0	4 2 0	4 2 1 0	2 1 4 0	2 1 1 4	4 4 2 1 0	0 1 4 0 4	2 0 1 4 4	4 0 0 4 0
24	4 3 1	4 3 1	4 3 2 1	3 0 4 1	3 2 0 4	0 4 3 2 1	3 2 4 1 0	3 2 0 4 0	4 3 2 1 1
25	4 4 3	4 4 3	4 4 3 2	4 3 4 2	4 3 2 4	1 4 4 3 2	4 3 4 2 1	4 3 2 4 1	4 4 3 0 2

表 B.8 具有 n 个因子 (其中 n_1 个为 B 因子)、25 次试验的近似最小 Q_B 低阶混杂设计

试验号	6-1	6-2	6-3	6-4	6-5
1	1 0 0 0 0 0	0 1 0 0 0 0	1 1 2 0 0 0	2 2 1 1 0 0	2 0 1 1 2 0
2	1 1 1 1 1 1	0 0 1 1 1 1	0 0 1 0 1 1	2 1 0 0 1 1	2 1 0 0 1 1
3	1 2 2 2 2 2	0 2 2 2 2 2	2 2 0 0 2 2	2 0 2 2 2 2	2 2 2 2 0 2
4	1 3 3 3 3 3	0 3 3 3 3 3	3 3 3 0 3 3	2 3 3 3 3 3	2 3 3 3 3 3
5	1 4 4 4 4 4	0 4 4 4 4 4	4 4 4 0 4 4	2 4 4 4 4 4	2 4 4 4 4 4
6	0 0 1 2 3 4	1 0 0 2 3 4	2 3 4 1 0 1	1 2 0 3 2 4	1 0 0 2 3 4
7	0 1 2 3 4 0	1 2 1 3 4 0	3 4 2 1 1 2	1 1 2 4 3 0	1 1 2 3 4 0
8	0 2 3 4 0 1	1 3 2 4 0 1	4 1 1 1 2 3	1 0 3 1 4 1	1 2 3 4 2 1
9	0 3 4 0 1 2	1 4 3 0 1 2	1 0 0 1 3 4	1 3 4 0 0 2	1 3 4 1 1 2
10	0 4 0 1 2 3	1 1 4 1 2 3	0 2 3 1 4 0	1 4 1 2 1 3	1 4 1 0 0 3
11	2 0 2 4 1 3	2 2 0 4 1 3	4 0 3 2 0 2	0 2 2 0 4 3	0 0 2 4 1 3
12	2 1 3 0 2 4	2 3 1 0 2 4	1 2 4 2 1 3	0 1 3 2 0 4	0 1 3 1 0 4
13	2 2 4 1 3 0	2 4 2 1 3 0	0 3 2 2 2 4	0 0 4 3 1 0	0 2 4 0 3 0
14	2 3 0 2 4 1	2 1 3 2 4 1	2 4 1 2 3 0	0 3 1 4 2 1	0 3 1 2 4 1
15	2 4 1 3 0 2	2 0 4 3 0 2	3 1 0 2 4 1	0 4 0 1 3 2	0 4 0 3 2 2
16	3 0 3 1 4 2	3 3 0 1 4 2	0 4 0 3 0 3	3 2 3 4 1 2	3 0 3 0 4 2
17	3 1 4 2 0 3	3 4 1 2 0 3	2 1 3 3 1 4	3 1 4 1 2 3	3 1 4 2 2 3
18	3 2 0 3 1 4	3 1 2 3 1 4	3 0 4 3 2 0	3 0 1 0 3 4	3 2 1 3 1 4
19	3 3 1 4 2 0	3 0 3 4 2 0	4 2 2 3 3 1	3 3 0 2 4 0	3 3 0 4 0 0
20	3 4 2 0 3 1	3 2 4 0 3 1	1 3 1 3 4 2	3 4 2 3 0 1	3 4 2 1 3 1
21	4 0 4 3 2 1	4 4 0 3 2 1	3 2 1 4 0 4	4 2 4 2 3 1	4 0 4 3 0 1
22	4 1 0 4 3 2	4 1 1 4 3 2	4 3 0 4 1 0	4 1 1 3 4 2	4 1 1 4 3 2
23	4 2 1 0 4 3	4 0 2 0 4 3	1 4 3 4 2 1	4 0 0 4 0 3	4 2 0 1 4 3
24	4 3 2 1 0 4	4 2 3 1 0 4	0 1 4 4 3 2	4 3 2 1 1 4	4 3 2 0 2 4
25	4 4 3 2 1 0	4 3 4 2 1 0	2 0 2 4 4 3	4 4 3 0 2 0	4 4 3 2 1 0

近似最小 Q 低阶混杂设计

首先, 我们在表 B.9-B.12 中展示了 n 个因子 (其中 n_1 个为 B 因子) 在 9 次和 18 次三水平试验、16 次四水平试验以及 25 次五水平试验下的 π_2 值

表 B.9 具有 9 次试验的近似最小 Q 低阶混杂设计的 π_2 值

n	$n = 3$		$n = 4$		
	$n_1 = 1$	$n_1 = 2$	$n_1 = 1$	$n_1 = 2$	$n_1 = 3$
π_2	14.78	7.71	47.50	40.31	22.46

表 B.10 具有 18 次试验的近似最小 Q 低阶混杂设计的 π_2 值

n	$n = 3$		$n = 4$		
	$n_1 = 1$	$n_1 = 2$	$n_1 = 1$	$n_1 = 2$	$n_1 = 3$
π_2	5.11	3.64	14	12.83	8.91
n	$n = 5$				$n = 6$
	$n_1 = 1$	$n_1 = 2$	$n_1 = 3$	$n_1 = 4$	$n_1 = 1$
π_2	29.11	29.96	24.56	17.43	51.94
n	$n = 6$				
	$n_1 = 2$	$n_1 = 3$	$n_1 = 4$	$n_1 = 5$	$n_1 = 1$
π_2	56.54	51.31	40.74	29.36	102.67
n	$n = 7$				
	$n_1 = 2$	$n_1 = 3$	$n_1 = 4$	$n_1 = 5$	$n_1 = 6$
π_2	107.14	105.42	87.5	69.05	50.90

表 B.11 具有 16 次试验的近似最小 Q 低阶混杂设计的 π_2 值

n	$n = 3$		$n = 4$		
n_1	$n_1 = 1$	$n_1 = 2$	$n_1 = 1$	$n_1 = 2$	$n_1 = 3$
π_2	30.97	13.72	93.14	76.56	37.18
n	$n = 5$				
n_1	$n_1 = 1$	$n_1 = 2$	$n_1 = 3$	$n_1 = 4$	
π_2	198.44	198.64	143.92	75.74	

表 B.12 具有 25 次试验的近似最小 Q 低阶混杂设计的 π_2 值

n	$n = 3$		$n = 4$		
n_1	$n_1 = 1$	$n_1 = 2$	$n_1 = 1$	$n_1 = 2$	$n_1 = 3$
π_2	52.04	20.20	151.98	121.68	52.21
n	$n = 5$				$n = 6$
n_1	$n_1 = 1$	$n_1 = 2$	$n_1 = 3$	$n_1 = 4$	$n_1 = 1$
π_2	317.20	317.72	221.41	104.39	559.70
n	$n = 6$				
n_1	$n_1 = 2$	$n_1 = 3$	$n_1 = 4$	$n_1 = 5$	
π_2	620.32	526.46	354.23	179.76	

接下来, 表 B.13-B.16 分别呈现了具有 9 和 18 次试验的三水平近似最小 Q 低阶混杂设计、16 次试验的四水平近似最小 Q 低阶混杂设计和 25 次试验的五水平近似最小 Q 低阶混杂设计.

表 B.13 具有 n 个因子 (其中 n_1 个为 B 因子)、9 次试验的近似最小 Q 低阶混杂设计

试验号	3-1	3-2	4-1	4-2	4-3
1	0 0 0	0 0 0	0 0 0 0	0 2 0 0	2 0 0 0
2	0 1 1	0 1 1	1 0 1 1	0 1 1 1	2 1 1 1
3	0 2 2	0 2 2	2 0 2 2	0 0 2 2	2 2 2 2
4	1 0 1	1 0 1	1 1 0 2	1 0 0 1	1 0 1 2
5	1 1 2	1 1 2	2 1 1 0	1 2 1 2	1 1 2 0
6	1 2 0	1 2 0	0 1 2 1	1 1 2 0	1 2 0 1
7	2 0 2	2 0 2	2 2 0 1	2 1 0 2	0 0 2 1
8	2 1 0	2 1 0	0 2 1 2	2 0 1 0	0 1 0 2
9	2 2 1	2 2 1	1 2 2 0	2 2 2 1	0 2 1 0

表 B.14 具有 n 个因子 (其中 n_1 个为 B 因子)、18 次试验的近似最小 Q 低阶混杂设计

试验号	3-1	3-2	4-1	4-2	4-3	5-1	5-2	5-3	5-4
1	0 0 0	0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	1 2 0 0 0	2 1 0 0 0
2	0 0 1	0 0 1	0 0 1 1	0 0 1 1	0 0 0 0	0 0 1 1 1	0 0 1 1 1	1 2 1 1 1	2 1 1 1 1
3	0 1 0	0 1 0	0 1 0 1	0 1 0 1	0 1 1 1	1 0 0 1 2	0 1 0 1 2	1 1 0 1 2	2 0 0 1 2
4	0 1 2	0 1 2	0 1 2 2	0 1 2 2	0 1 2 2	1 0 2 2 0	0 1 2 2 0	1 1 2 2 0	2 0 2 2 0
5	0 2 1	0 2 1	0 2 1 2	0 2 1 2	0 2 1 2	2 0 1 2 2	0 2 1 2 2	1 0 1 2 2	2 2 1 2 2
6	0 2 2	0 2 2	0 2 2 0	0 2 2 0	0 2 2 1	2 0 2 0 1	0 2 2 0 1	1 0 2 0 1	2 2 2 0 1
7	1 0 0	1 0 0	1 0 0 2	1 0 0 2	1 0 1 1	0 1 0 2 2	1 0 0 2 2	0 2 0 2 2	1 1 0 2 2
8	1 0 2	1 0 2	1 0 2 1	1 0 2 1	1 0 2 2	0 1 2 1 0	1 0 2 1 0	0 2 2 1 0	1 1 2 1 0
9	1 1 1	1 1 1	1 1 1 2	1 1 1 2	1 1 0 1	1 1 1 2 1	1 1 1 2 1	0 1 1 2 1	1 0 1 2 1
10	1 1 2	1 1 2	1 1 2 0	1 1 2 0	1 1 1 0	1 1 2 0 2	1 1 2 0 2	0 1 2 0 2	1 0 2 0 2
11	1 2 0	1 2 0	1 2 0 1	1 2 0 1	1 2 0 2	2 1 0 1 1	1 2 0 1 1	0 0 0 1 1	1 2 0 1 1
12	1 2 1	1 2 1	1 2 1 0	1 2 1 0	1 2 2 0	2 1 1 0 0	1 2 1 0 0	0 0 1 0 0	1 2 1 0 0
13	2 0 1	2 0 1	2 0 1 0	2 0 1 0	2 0 1 2	0 2 1 0 2	2 0 1 0 2	2 2 1 0 2	0 1 1 0 2
14	2 0 2	2 0 2	2 0 2 2	2 0 2 2	2 0 2 1	0 2 2 2 1	2 0 2 2 1	2 2 2 2 1	0 1 2 2 1
15	2 1 0	2 1 0	2 1 0 0	2 1 0 0	2 1 0 2	1 2 0 0 1	2 1 0 0 1	2 1 0 0 1	0 0 0 0 1
16	2 1 1	2 1 1	2 1 1 1	2 1 1 1	2 1 2 0	1 2 1 1 0	2 1 1 1 0	2 1 1 1 0	0 0 1 1 0
17	2 2 0	2 2 0	2 2 0 2	2 2 0 2	2 2 0 1	2 2 0 2 0	2 2 0 2 0	2 0 0 2 0	0 2 0 2 0
18	2 2 2	2 2 2	2 2 2 1	2 2 2 1	2 2 1 0	2 2 2 1 2	2 2 2 1 2	2 0 2 1 2	0 2 2 1 2

表 B.14 具有 n 个因子 (其中 n_1 个为 B 因子)、18 次试验的近似最小 Q 低阶混杂设计

试验号	6-1	6-2	6-3	6-4	6-5
1	2 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 1 0 0 0	0 0 1 1 0 0	1 2 1 0 0 0
2	1 0 0 1 1 1	0 0 1 1 1 1	0 0 0 1 1 1	0 0 0 0 1 1	1 2 0 1 1 1
3	1 0 1 0 2 2	0 1 0 1 2 2	0 1 0 0 2 2	0 1 0 2 0 2	1 1 1 1 2 2
4	0 0 1 2 0 1	0 1 2 2 0 1	0 1 2 2 0 1	0 1 2 0 2 0	1 1 2 2 0 1
5	0 0 2 1 2 0	0 2 1 2 2 0	0 2 2 1 2 0	0 2 2 1 1 2	1 0 0 2 2 0
6	2 0 2 2 1 2	0 2 2 0 1 2	0 2 1 2 1 2	0 2 1 2 2 1	1 0 2 0 1 2
7	0 1 0 0 2 1	1 0 0 2 2 1	1 0 2 0 2 1	1 0 2 0 0 2	0 2 1 2 2 1
8	1 1 0 2 0 2	1 0 2 1 0 2	1 0 0 2 0 2	1 0 0 2 2 0	0 2 2 1 0 2
9	0 1 1 1 1 2	1 1 1 2 1 2	1 1 2 1 1 2	1 1 2 2 1 1	0 1 0 2 1 2
10	2 1 1 2 2 0	1 1 2 0 2 0	1 1 1 2 2 0	1 1 1 1 2 2	0 1 2 0 2 0
11	1 1 2 0 1 0	1 2 0 1 1 0	1 2 0 0 1 0	1 2 0 1 0 1	0 0 1 1 1 0
12	2 1 2 1 0 1	1 2 1 0 0 1	1 2 1 1 0 1	1 2 1 0 1 0	0 0 0 0 0 1
13	2 2 0 1 2 2	2 0 1 0 2 2	2 0 1 1 2 2	2 0 1 2 1 2	2 2 0 0 2 2
14	0 2 0 2 1 0	2 0 2 2 1 0	2 0 2 2 1 0	2 0 2 1 2 1	2 2 2 2 1 0
15	2 2 1 0 1 1	2 1 0 0 1 1	2 1 1 0 1 1	2 1 1 0 0 1	2 1 1 0 1 1
16	1 2 1 1 0 0	2 1 1 1 0 0	2 1 0 1 0 0	2 1 0 1 1 0	2 1 0 1 0 0
17	0 2 2 0 0 2	2 2 0 2 0 2	2 2 2 0 0 2	2 2 2 2 0 0	2 0 1 2 0 2
18	1 2 2 2 2 1	2 2 2 1 2 1	2 2 0 2 2 1	2 2 0 0 2 2	2 0 2 1 2 1

表 B.14 具有 n 个因子 (其中 n_1 个为 B 因子)、18 次试验的近似最小 Q 低阶混杂设计

试验号	7-1	7-2	7-3	7-4	7-5	7-6
1	0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0	2 0 2 0 0 0 0	0 0 1 1 0 0 0	2 2 2 1 1 0 0	2 0 0 2 0 0 0
2	1 0 0 0 1 1 1	0 0 0 1 1 1 1	2 0 1 0 1 1 1	1 1 0 0 0 0 0	2 2 2 0 0 1 1	2 0 0 1 1 1 1
3	2 0 1 1 0 0 2	1 1 0 0 0 2 2	2 1 2 1 0 2 2	0 0 2 2 0 1 1	2 1 1 2 2 0 0	2 1 1 2 0 2 2
4	1 0 1 1 2 2 1	1 1 0 2 2 1 1	2 1 0 1 2 1 1	2 2 0 0 0 1 1	2 1 1 0 0 2 2	2 1 1 0 2 1 1
5	2 0 2 2 1 1 2	2 2 0 1 1 2 2	2 2 1 2 1 2 2	1 1 2 2 0 2 2	2 0 0 2 2 1 1	2 2 2 1 2 0 2
6	0 0 2 2 2 2 0	2 2 0 2 2 0 0	2 2 0 2 2 0 0	2 2 1 1 0 2 2	2 0 0 1 1 2 2	2 2 2 0 1 2 0
7	2 1 0 1 1 2 0	0 1 1 1 2 0 2	1 0 0 1 1 0 2	1 2 1 2 1 0 1	1 2 1 1 2 1 2	1 0 1 1 1 2 2
8	0 1 0 1 2 1 2	0 1 1 2 1 2 0	1 0 1 1 2 2 0	2 1 2 1 1 0 1	1 2 1 2 1 2 1	1 0 1 0 2 0 0
9	1 1 1 2 0 1 0	1 2 1 0 1 1 0	1 1 1 2 0 0 1	0 1 1 0 1 1 2	1 1 0 1 0 0 1	1 1 2 2 1 0 1
10	0 1 1 2 1 0 1	1 2 1 1 0 0 1	1 1 2 2 1 1 0	1 0 0 1 1 1 2	1 1 0 0 1 1 0	1 1 2 1 0 1 0
11	2 1 2 0 0 2 1	2 0 1 0 2 1 2	1 2 0 0 0 1 2	0 2 0 2 1 2 0	1 0 2 0 2 0 2	1 2 0 2 2 2 1
12	1 1 2 0 2 0 2	2 0 1 2 0 2 1	1 2 2 0 2 2 1	2 0 2 0 1 2 0	1 0 2 2 0 2 0	1 2 0 0 0 1 2
13	1 2 0 2 0 2 2	0 2 2 0 2 2 1	0 0 0 2 0 2 1	0 2 2 0 2 0 2	0 2 0 2 0 0 2	0 0 2 2 2 1 2
14	2 2 0 2 2 0 1	0 2 2 2 0 1 2	0 0 2 2 2 1 2	2 0 0 2 2 0 2	0 2 0 0 2 2 0	0 0 2 0 0 2 1
15	0 2 1 0 1 2 2	1 0 2 1 2 2 0	0 1 0 0 1 2 0	1 2 2 1 2 1 0	0 1 2 2 1 1 2	0 1 0 1 2 2 0
16	2 2 1 0 2 1 0	1 0 2 2 1 0 2	0 1 1 0 2 0 2	2 1 1 2 2 1 0	0 1 2 1 2 2 1	0 1 0 0 1 0 2
17	0 2 2 1 0 1 1	2 1 2 0 1 0 1	0 2 1 1 0 1 0	0 1 0 1 2 2 1	0 0 1 0 1 0 1	0 2 1 2 1 1 0
18	1 2 2 1 1 0 0	2 1 2 1 0 1 0	0 2 2 1 1 0 1	1 0 1 0 2 2 1	0 0 1 1 0 1 0	0 2 1 1 0 0 1

表 B.15 具有 n 个因子 (其中 n_1 个为 B 因子)、16 次试验的近似最小 Q 低阶混杂设计

试验号	3-1	3-2	4-1	4-2	4-3	5-1	5-2	5-3	5-4
1	0 0 0	0 0 0	0 0 0 0	2 0 0 0	1 0 0 0	0 0 0 0 0	2 0 0 0 0	0 2 0 0 0	0 2 1 0 0
2	0 1 1	0 1 1	1 0 1 1	2 1 1 1	1 1 1 1	1 0 1 1 1	1 1 0 1 1	0 1 1 1 1	0 1 0 1 1
3	0 2 2	0 2 2	2 0 2 2	2 2 2 2	1 2 2 2	2 0 2 2 2	0 2 0 2 2	0 0 2 2 2	0 0 2 2 2
4	0 3 3	0 3 3	3 0 3 3	2 3 3 3	1 3 3 3	3 0 3 3 3	3 3 0 3 3	0 3 3 3 3	0 3 3 3 3
5	1 0 1	1 0 1	2 1 0 1	1 1 0 2	0 0 1 2	0 1 1 2 3	0 3 1 0 1	1 2 1 2 3	1 2 0 2 3
6	1 1 0	1 1 0	3 1 1 0	1 0 1 3	0 1 0 3	1 1 0 3 2	3 2 1 1 0	1 1 0 3 2	1 1 1 3 2
7	1 2 3	1 2 3	0 1 2 3	1 3 2 0	0 2 3 0	2 1 3 0 1	2 1 1 2 3	1 0 3 0 1	1 0 3 0 1
8	1 3 2	1 3 2	1 1 3 2	1 2 3 1	0 3 2 1	3 1 2 1 0	1 0 1 3 2	1 3 2 1 0	1 3 2 1 0
9	2 0 2	2 0 2	3 2 0 2	0 2 0 3	2 0 2 3	0 2 2 3 1	3 1 2 0 2	2 2 2 3 1	2 2 2 3 1
10	2 1 3	2 1 3	2 2 1 3	0 3 1 2	2 1 3 2	1 2 3 2 0	0 0 2 1 3	2 1 3 2 0	2 1 3 2 0
11	2 2 0	2 2 0	1 2 2 0	0 0 2 1	2 2 0 1	2 2 0 1 3	1 3 2 2 0	2 0 0 1 3	2 0 1 1 3
12	2 3 1	2 3 1	0 2 3 1	0 1 3 0	2 3 1 0	3 2 1 0 2	2 2 2 3 1	2 3 1 0 2	2 3 0 0 2
13	3 0 3	3 0 3	1 3 0 3	3 3 0 1	3 0 3 1	0 3 3 1 2	1 2 3 0 3	3 2 3 1 2	3 2 3 1 2
14	3 1 2	3 1 2	0 3 1 2	3 2 1 0	3 1 2 0	1 3 2 0 3	2 3 3 1 2	3 1 2 0 3	3 1 2 0 3
15	3 2 1	3 2 1	3 3 2 1	3 1 2 3	3 2 1 3	2 3 1 3 0	3 0 3 2 1	3 0 1 3 0	3 0 0 3 0
16	3 3 0	3 3 0	2 3 3 0	3 0 3 2	3 3 0 2	3 3 0 2 1	0 1 3 3 0	3 3 0 2 1	3 3 1 2 1

表 B.16 具有 n 个因子 (其中 n_1 个为 B 因子)、25 次试验的近似最小 Q 低阶混杂设计

试验号	3-1	3-2	4-1	4-2	4-3	5-1	5-2	5-3	5-4
1	0 0 0	1 0 0	1 0 0 0	1 2 0 0	0 0 1 0	0 0 0 0 0	2 0 0 0 0	0 1 1 0 0	1 0 2 0 0
2	0 1 1	1 1 1	1 1 1 1	0 1 0 1	1 1 0 0	1 0 1 1 1	1 1 0 1 1	1 0 0 0 1	1 1 1 1 1
3	0 2 2	1 2 2	1 2 2 2	2 0 0 2	2 2 2 0	2 0 2 2 2	0 2 0 2 2	2 2 2 0 2	1 2 0 2 2
4	0 3 3	1 3 3	1 3 3 3	3 3 0 3	3 3 3 0	3 0 3 3 3	3 3 0 3 3	3 3 3 0 3	1 3 3 3 3
5	0 4 4	1 4 4	1 4 4 4	4 4 0 4	4 4 4 0	4 0 4 4 4	4 4 0 4 4	4 4 4 0 4	1 4 4 4 4
6	1 0 1	0 0 1	0 0 1 2	1 1 1 2	0 1 2 1	3 1 0 1 2	2 1 1 2 3	0 0 2 1 3	0 0 1 2 3
7	1 1 0	0 1 0	0 1 2 3	0 0 1 3	1 2 3 1	4 1 1 2 3	1 2 1 3 4	1 2 3 1 4	0 1 0 3 4
8	1 2 3	0 2 3	0 2 3 4	2 3 1 4	2 3 4 1	0 1 2 3 4	0 3 1 4 0	2 3 4 1 0	0 2 3 4 0
9	1 3 4	0 3 4	0 3 4 0	3 4 1 0	3 4 1 1	1 1 3 4 0	3 4 1 0 1	3 4 1 1 1	0 3 4 0 1
10	1 4 2	0 4 2	0 4 0 1	4 2 1 1	4 0 0 1	2 1 4 0 1	4 0 1 1 2	4 1 0 1 2	0 4 2 1 2
11	2 0 2	2 0 2	2 0 2 4	1 0 2 4	0 2 4 2	1 2 0 2 4	2 2 2 4 1	0 2 4 2 1	2 0 0 4 1
12	2 1 3	2 1 3	2 1 3 0	0 3 2 0	1 3 1 2	2 2 1 3 0	1 3 2 0 2	1 3 1 2 2	2 1 3 0 2
13	2 2 4	2 2 4	2 2 4 1	2 4 2 1	2 4 0 2	3 2 2 4 1	0 4 2 1 3	2 4 0 2 3	2 2 4 1 3
14	2 3 0	2 3 0	2 3 0 2	3 2 2 2	3 0 2 2	4 2 3 0 2	3 0 2 2 4	3 1 2 2 4	2 3 2 2 4
15	2 4 1	2 4 1	2 4 1 3	4 1 2 3	4 1 3 2	0 2 4 1 3	4 1 2 3 0	4 0 3 2 0	2 4 1 3 0
16	3 0 3	3 0 3	3 0 3 1	1 3 3 1	0 3 0 3	4 3 0 3 1	2 3 3 1 4	0 3 0 3 4	3 0 3 1 4
17	3 1 4	3 1 4	3 1 4 2	0 4 3 2	1 4 2 3	0 3 1 4 2	1 4 3 2 0	1 4 2 3 0	3 1 4 2 0
18	3 2 1	3 2 1	3 2 0 3	2 2 3 3	2 0 3 3	1 3 2 0 3	0 0 3 3 1	2 1 3 3 1	3 2 2 3 1
19	3 3 2	3 3 2	3 3 1 4	3 1 3 4	3 1 4 3	2 3 3 1 4	3 1 3 4 2	3 0 4 3 2	3 3 1 4 2
20	3 4 0	3 4 0	3 4 2 0	4 0 3 0	4 2 1 3	3 3 4 2 0	4 2 3 0 3	4 2 1 3 3	3 4 0 0 3
21	4 0 4	4 0 4	4 0 4 3	1 4 4 3	0 4 3 4	2 4 0 4 3	2 4 4 3 2	0 4 3 4 2	4 0 4 3 2
22	4 1 2	4 1 2	4 1 0 4	0 2 4 4	1 0 4 4	3 4 1 0 4	1 0 4 4 3	1 1 4 4 3	4 1 2 4 3
23	4 2 0	4 2 0	4 2 1 0	2 1 4 0	2 1 1 4	4 4 2 1 0	0 1 4 0 4	2 0 1 4 4	4 2 1 0 4
24	4 3 1	4 3 1	4 3 2 1	3 0 4 1	3 2 0 4	0 4 3 2 1	3 2 4 1 0	3 2 0 4 0	4 3 0 1 0
25	4 4 3	4 4 3	4 4 3 2	4 3 4 2	4 3 2 4	1 4 4 3 2	4 3 4 2 1	4 3 2 4 1	4 4 3 2 1

表 B.16 具有 n 个因子 (其中 n_1 个为 B 因子)、25 次试验的近似最小 Q 低阶混杂设计

试验号	6-1	6-2	6-3	6-4	6-5
1	1 0 0 0 0 0	0 1 0 0 0 0	1 1 2 0 0 0	2 2 1 1 0 0	1 1 1 0 0 0
2	1 1 1 1 1 1	0 0 1 1 1 1	0 0 1 0 1 1	2 1 0 0 1 1	1 0 0 1 1 1
3	1 2 2 2 2 2	0 2 2 2 2 2	2 2 0 0 2 2	2 0 2 2 2 2	1 2 2 2 2 2
4	1 3 3 3 3 3	0 3 3 3 3 3	3 3 3 0 3 3	2 3 3 3 3 3	1 3 3 3 3 3
5	1 4 4 4 4 4	0 4 4 4 4 4	4 4 4 0 4 4	2 4 4 4 4 4	1 4 4 4 4 4
6	0 0 1 2 3 4	1 0 0 2 3 4	1 0 0 1 3 4	1 2 0 3 2 4	0 1 0 2 3 4
7	0 1 2 3 4 0	1 2 1 3 4 0	0 2 3 1 4 0	1 1 2 4 3 0	0 0 2 3 4 0
8	0 2 3 4 0 1	1 3 2 4 0 1	2 3 4 1 0 1	1 0 3 1 4 1	0 2 3 4 0 1
9	0 3 4 0 1 2	1 4 3 0 1 2	3 4 2 1 1 2	1 3 4 0 0 2	0 3 4 0 1 2
10	0 4 0 1 2 3	1 1 4 1 2 3	4 1 1 1 2 3	1 4 1 2 1 3	0 4 1 1 2 3
11	2 0 2 4 1 3	2 2 0 4 1 3	1 2 4 2 1 3	0 2 2 0 4 3	2 1 2 4 1 3
12	2 1 3 0 2 4	2 3 1 0 2 4	0 3 2 2 2 4	0 1 3 2 0 4	2 0 3 0 2 4
13	2 2 4 1 3 0	2 4 2 1 3 0	2 4 1 2 3 0	0 0 4 3 1 0	2 2 4 1 3 0
14	2 3 0 2 4 1	2 1 3 2 4 1	3 1 0 2 4 1	0 3 1 4 2 1	2 3 1 2 4 1
15	2 4 1 3 0 2	2 0 4 3 0 2	4 0 3 2 0 2	0 4 0 1 3 2	2 4 0 3 0 2
16	3 0 3 1 4 2	3 3 0 1 4 2	1 3 1 3 4 2	3 2 3 4 1 2	3 1 3 1 4 2
17	3 1 4 2 0 3	3 4 1 2 0 3	0 4 0 3 0 3	3 1 4 1 2 3	3 0 4 2 0 3
18	3 2 0 3 1 4	3 1 2 3 1 4	2 1 3 3 1 4	3 0 1 0 3 4	3 2 1 3 1 4
19	3 3 1 4 2 0	3 0 3 4 2 0	3 0 4 3 2 0	3 3 0 2 4 0	3 3 0 4 2 0
20	3 4 2 0 3 1	3 2 4 0 3 1	4 2 2 3 3 1	3 4 2 3 0 1	3 4 2 0 3 1
21	4 0 4 3 2 1	4 4 0 3 2 1	1 4 3 4 2 1	4 2 4 2 3 1	4 1 4 3 2 1
22	4 1 0 4 3 2	4 1 1 4 3 2	0 1 4 4 3 2	4 1 1 3 4 2	4 0 1 4 3 2
23	4 2 1 0 4 3	4 0 2 0 4 3	2 0 2 4 4 3	4 0 0 4 0 3	4 2 0 0 4 3
24	4 3 2 1 0 4	4 2 3 1 0 4	3 2 1 4 0 4	4 3 2 1 1 4	4 3 2 1 0 4
25	4 4 3 2 1 0	4 3 4 2 1 0	4 3 0 4 1 0	4 4 3 0 2 0	4 4 3 2 1 0

Multi-Level Factorial Designs Under Mixed Parameterization

Xinxin Xia, Chunyan Wang & Fasheng Sun

Abstract Factorial effects are traditionally analyzed using either orthogonal or baseline parameterizations. However, practical applications often demand interpreting results within both frameworks simultaneously, leading to the concept of *mixed parameterization*. Although some scholars have studied two-level designs under mixed parameterization, extending this framework to s (≥ 3)-level designs remains challenging. This paper aims to investigate the construction and theoretical properties of s -level designs under mixed parameterization for any $s \geq 3$. We first establish the relationships among orthogonal, baseline, and mixed parameterizations. We then demonstrate that, under mixed parameterization, an s -level orthogonal array achieves D_s -optimality among all designs and attains A_s -optimality within the class of balanced designs under the main-effect model. Building on these results, we propose two minimum aberration criteria for s -level designs and present a search algorithm for constructing optimal designs under mixed parameterization, thereby offering new design methodologies for multi-level experiments.

Keywords Fractional factorial design, Minimum aberration, Mixed parameterization, Orthogonal array

MSC(2020) 62K05, 62K15

doi: 10.1360/SSM-2026-XXXX